دفترچه سوالات سومین المپیاد هندسه ایران

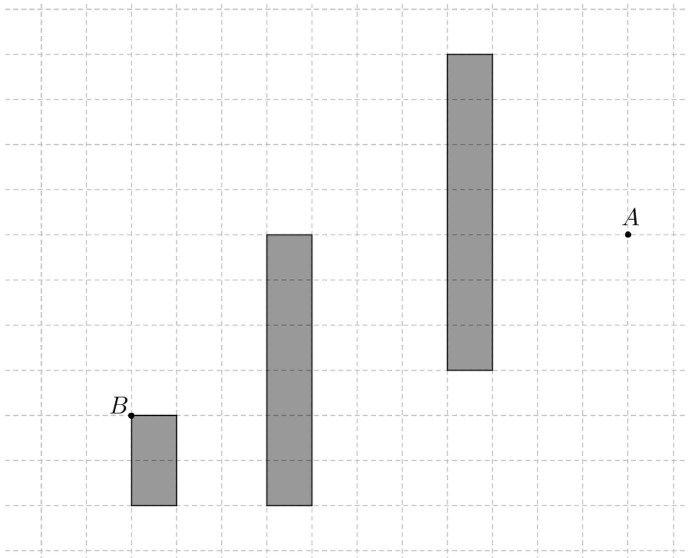
۱۸ شهریور ۱۳۹۵

دانشگاه صنعتی شریف و دبیرستان علامه حلی تهران

این دفترچه توسط آقایان هیراد عالی پناه و ایمان مقصودی با همکاری آقایان مرتضی ثقفیان، هومن فتاهی مقدم، داوود وکیلی و مهدی اعتصامی فرد تهیه شده است.

آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱. علی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود، اما او نمی تواند داخل قسمت های مشکی حرکت کند. (او می تواند در هر جهت دلخواهی حرکت کند و لزومی ندارد تنها روی خطوط شبکه حرکت کند) کوتاه ترین مسیر حرکت علی بین این دو نقطه را رسم کنید و طول آن را بنویسید.



مرتضی ثقفیان

۲. در مثلث ABC $(AB < AC)$ با دایره محیطی ω، نقاط X و Y به ترتیب روی ضلع AC و دایره ω به صورتی انتخاب شده اند که $CX = CY = AB$. (A و Y در یک سمت ضلع BC قرار ندارند.) اگر خط XY دایره ω را برای بار دوم در P قطع کند ثابت کنید $PB = PC$.

ایمان مقصودی

۳. $ABCD$ چهار ضلعی محدبی است که هیچ دو ضلع آن موازی نیستند. روی هر دو ضلع مجاور این چهار ضلعی، متوازی الاضلاعی می سازیم. ثابت کنید در میان این متوازی الاضلاع ها، دقیقا یکی وجود دارد که راس چهارمش (راسی که متعلق به رئوس چهارضلعی نیست) درون چهار ضلعی قرار می گیرد.

مرتضی ثقفیان

۴. مثلث قائم الزاویه ABC با $\angle A = ۹۰^\circ$ مفروض است. عمود منصف ضلع BC را رسم می کنیم تا AC را در K قطع کند. عمود منصف BK را نیز رسم می کنیم تا AB را در L قطع کند. اگر CL نیمساز زاویه C باشد مقادیر زوایای B و C را بیابید.

مهدی اعتصامی فرد

۵. در چهارضلعی محدب $ABCD$ می دانیم زاویه ADC برابر ۱۳۵ درجه است و همچنین :

$$\angle ADB - \angle ABD = ۲\angle DAB = ۴\angle CBD$$

اگر طول ضلع BC، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع CD باشد ثابت کنید طول ضلع AB با مجموع طول های اضلاع BC و AD برابر است.

مهدی اعتصامی فرد

آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱. ذوزنقه $ABCD$ با شرط $AB \parallel CD$ مفروض است. فرض کنید ω_1 و ω_2 دایره هایی به قطر AD و BC باشند. نقاط X و Y را به صورت دلخواه روی ω_1 و ω_2 انتخاب می کنیم. ثابت کنید طول XY بیشتر از نصف محیط ذوزنقه نیست.

مهدی اعتصامی فرد

۲. دو دایره C_1 و C_2 در نقاط A و B متقاطعند. از A بر C_1 مماسی رسم می کنیم تا دایره دوم را در P قطع کند. خط PB دایره C_1 را برای بار دوم در Q قطع می کند. (فرض کنید Q خارج دایره C_2 قرار دارد.) از Q مماس QD را بر دایره C_2 رسم می کنیم تا دایره C_1 را در نقطه C قطع کند. (A و D در یک طرف PQ قرار ندارند.) ثابت کنید خط AD نیمساز زاویه CAP است.

ایمان مقصودی

۳. همه اعداد طبیعی n را بیابید به گونه ای که مثلثی وجود داشته باشد که بتوان آن را به n چهارضلعی متشابه افراز کرد.

مرتضی ثقفیان - بلوهف

۴. مثلث قائم الزاویه ABC با $\angle A = ۹۰^\circ$ مفروض است. در نقطه A بر دایره محیطی مثلث مماس می کنیم تا BC را در P قطع کند. فرض کنید M وسط کمان AB باشد و PM دایره محیطی را برای بار دوم در Q قطع کند. اگر مماس بر دایره در Q خط AC را در K قطع کند ثابت کنید زاویه PKC برابر ۹۰ درجه است.

داوود وکیلی

۵. دوایر ω_1 و ω_2 در A و B متقاطعند. مماس بر دایره ω_1 در A دایره ω_2 را در C و مماس بر دایره ω_2 در A دایره ω_1 را در D قطع می کند. اگر نیمساز داخلی زاویه CAD دوایر ω_1 و ω_2 را در E و F و نیمساز خارجی آن دوایر ω_1 و ω_2 را در X و Y قطع کند ثابت کنید عمود منصف XY بر دایره محیطی مثلث BEF مماس است.

مهدی اعتصامی فرد

آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱. دو دایره ω_1 و ω_2 در A و B متقاطعند. مماس بر دایره ω_1 در A دایره ω_2 را در C و مماس بر دایره ω_2 در A دایره ω_1 را در D قطع می کند. فرض کنید خط CD، ω_1 و ω_2 را به ترتیب در E و F قطع کند.(E بین C و F قرار دارد.) از E بر AC عمود می کنیم تا ω_2 را در P و از F بر AD عمود می کنیم تا ω_1 را در Q قطع کند. ثابت کنید A و P و Q همخطند.

مهدی اعتصامی فرد

۲. مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید M وسط ضلع AC و D پای ارتفاع وارد شده بر ضلع BC باشد. نقطه X را به گونه ای در نظر می گیریم که زاویه های AXB و DXM برابر 90° باشند. (X و C در دو طرف BM قرار دارند.) ثابت کنید زاویه XMB دو برابر زاویه MBC است.

داوود وکیلی

۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$، محل برخورد AD و BC را P می نامیم. فرض کنید I_1 و I_2 مراکز دوایر محاطی مثلث های PAB و PDC باشند. اگر مرکز دایره محیطی مثلث PAB را O و مرکز ارتفاعی مثلث PDC را H بنامیم، در این صورت نشان دهید دوایر محیطی مثلث های AI_1B و DHC بر یکدیگر مماسند اگر و تنها اگر دوایر محیطی مثلث های AOB و DI_2C بر یکدیگر مماس باشند.

هومن فتاحی مقدم

۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. خطوط AB و CD یکدیگر را در E و خطوط AD و BC یکدیگر را در F قطع می کنند. P را محل برخورد قطر های چهارضلعی در نظر بگیرید. فرض کنید ω_1 دایره ای است که از D می گذرد، بر AC در P مماس است و AD را در X قطع می کند و ω_2 دایره ای است که از C می گذرد، بر BD در P مماس است و BC را در Y قطع می کند. اگر دو دایره برای بار دوم در Q یکدیگر را قطع کنند ثابت کنید عمود وارد از P بر EF از مرکز دایره محیطی مثلث XQY می گذرد.

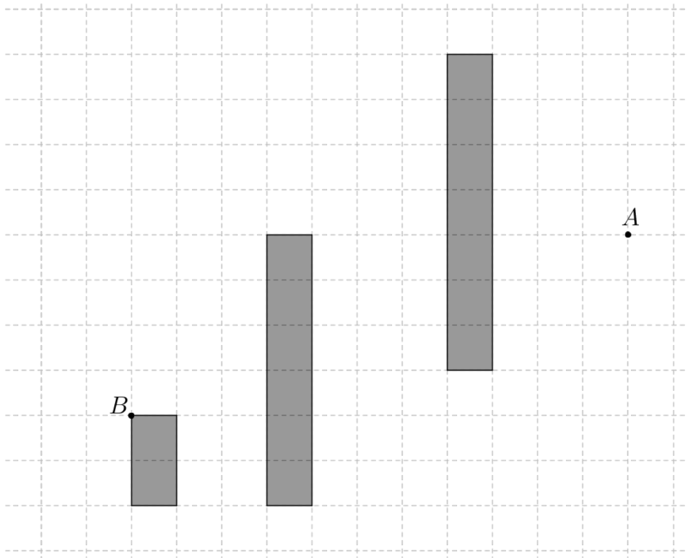
ایمان مقصودی

۵. آیا شش نقطه X_1، X_2، Y_1، Y_2، Z_1، و Z_2 در صفحه وجود دارند به صورتی که برای هر $1 \leq i,j,k \leq 2$، مثلث های $X_iY_jZ_k$ متشابه باشند؟

مرتضی ثقفیان

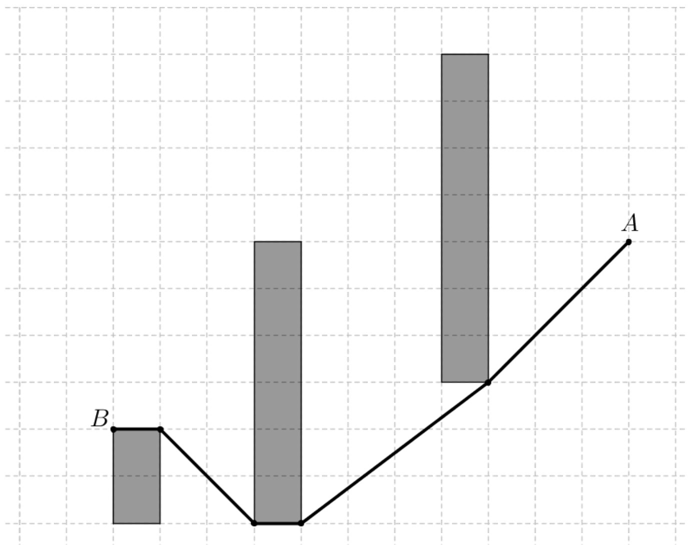
پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱. علی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود، اما او نمی تواند داخل قسمت های مشکی حرکت کند. (او می تواند در هر جهت دلخواهی حرکت کند و لزومی ندارد تنها روی خطوط شبکه حرکت کند) کوتاه ترین مسیر حرکت علی بین این دو نقطه را رسم کنید و طول آن را بنویسید.



مرتضی ثقفیان

راه حل.



با توجه به قضیه فیثاغورس، طول مسیر به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\sqrt{۳^۲ + ۳^۲} + \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} + ۱ + \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} + ۱ = ۷ + ۵\sqrt{۲}$$

۲. در مثلث ABC $(AB < AC)$ با دایره محیطی ω نقاط X و Y به ترتیب روی ضلع AC و دایره ω به صورتی انتخاب شده اند که $CX = CY = AB$. (A و Y در یک سمت ضلع BC قرار ندارند.) اگر خط XY دایره ω را برای بار دوم در P قطع کند ثابت کنید $PB = PC$.

ایمان مقصودی

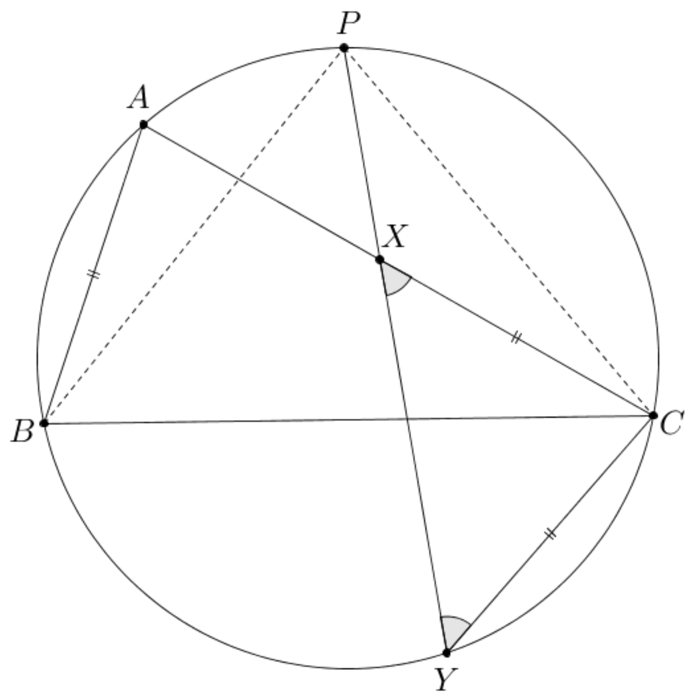
− −

راه حل.

می دانیم که $CX = CY$. بنابراین داریم :

$$\angle YXC = \angle XYC \;\;\Rightarrow\;\; AP + CY = PC$$

همچنین می دانیم که $AB = CY$ پس $AP + CY = AP + AB = PB$ و در نتیجه PB با PC برابر است.



۳. $ABCD$ چهار ضلعی محدبی است که هیچ دو ضلع آن موازی نیستند. روی هر دو ضلع مجاور این چهار ضلعی، متوازی الاضلاعی می سازیم. ثابت کنید در میان این متوازی الاضلاع ها، دقیقا یکی وجود دارد که راس چهارمش (راسی که متعلق به رئوس چهارضلعی نیست) درون چهار ضلعی قرار می گیرد.

مرتضی ثقفیان

— —

راه حل.
به وضوح خطی که از B موازی AD رسم می شود درون چهارضلعی است اگر و تنها اگر $\angle DAB + \angle ABC > \angle$ ۱۸۰°.

بنابراین باید راسی را بیابیم که مجموع زاویه اش با هر یک از زوایای مجاورش بیشتر از ۱۸۰ درجه شود، و مشخص است که تنها یک راس با این خاصیت وجود دارد.

۴. مثلث قائم الزاویه ABC با $\angle A = ۹۰^\circ$ مفروض است. عمود منصف ضلع BC را رسم می کنیم تا AC را در K قطع کند. عمود منصف BK را نیز رسم می کنیم تا AB را در L قطع کند. اگر CL نیمساز زاویه C باشد مقادیر زوایای B و C را بیابید.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل.
اگر $AC > AB$ باشد، در این صورت :

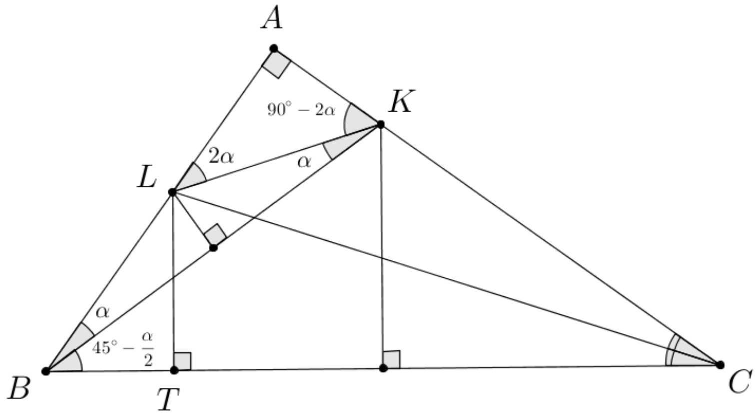
$$\angle LBK = \angle LKB = \alpha \;\Rightarrow\; \angle KLA = ۲\alpha \;\Rightarrow\; \angle LKA = ۹۰^\circ - ۲\alpha$$

$$BK = CK \;\Rightarrow\; \angle KBC = \angle KCB = \frac{\angle BKA}{۲} = ۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

نقطه T را روی BC به صورتی در نظر بگیرید که LT بر BC عمود باشد. می دانیم که خط CL نیمساز زاویه C است. پس $LA = LT$ و از آنجایی که $LB = LK$ بنابراین دو مثلث BTL و KAL همنهشتند. حال داریم :

$$\Rightarrow\; \angle LBT = \angle LKA \;\Rightarrow\; ۴۵^\circ + \frac{\alpha}{۲} = ۹۰^\circ - ۲\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = ۱۸^\circ$$

بنابراین زاویه B برابر ۵۴ درجه و زاویه C برابر ۳۶ درجه است.



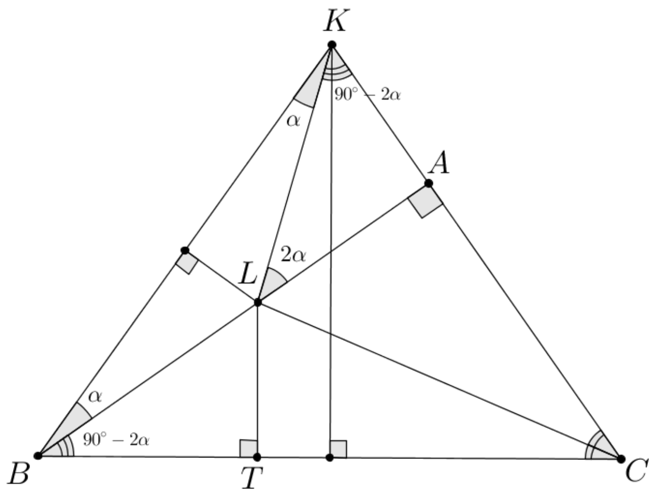
حال فرض کنید $AB > AC$ باشد. در این صورت مشابه قسمت قبل نتیجه می گیریم دو مثلث BTL و KAL همنهشتند. حال داریم :

$$\Rightarrow \angle LBT = \angle LKA = ۹۰^\circ - ۲\alpha \Rightarrow \angle CBK = \angle BKC = ۹۰^\circ - \alpha$$

از طرف دیگر می دانیم :

$$BK = CK \Rightarrow \angle CBK = \angle BKC = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

بنابراین زاویه B برابر ۳۰ درجه و زاویه C برابر ۶۰ درجه است.



اگر $AB = AC$ باشد، در این حالت $K \equiv A$ و L وسط AB است. نقطه T را روی BC به صورتی در نظر بگیرید که LT بر BC عمود باشد. می دانیم که CL نیمساز زاویه C است. پس $LT = LA = LB$، که نا ممکن است پس این حالت جوابی ندارد.

۵. در چهارضلعی محدب $ABCD$ می دانیم زاویه ADC برابر ۱۳۵ درجه است و همچنین :

$$\angle ADB - \angle ABD = ۲\angle DAB = ۴\angle CBD$$

اگر طول ضلع BC، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع CD باشد ثابت کنید طول ضلع AB با مجموع طول های اضلاع BC و AD برابر است.

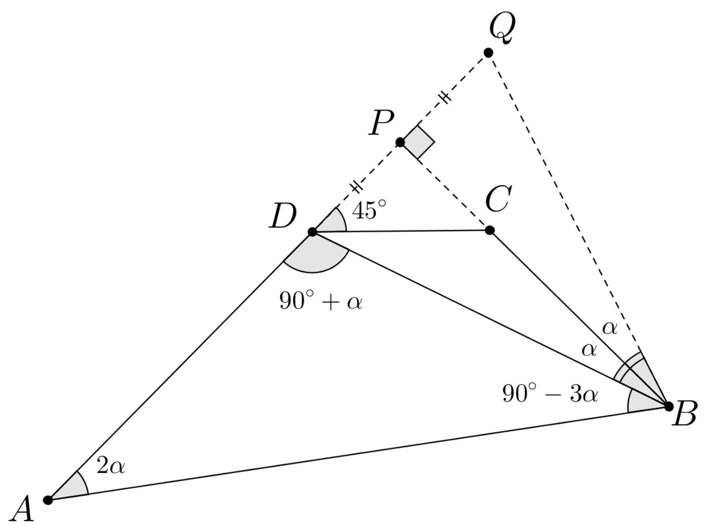
مهدی اعتصامی فرد

راه حل.
فرض کنید $\angle CBD = \alpha$ باشد. پس $\angle DAB = ۲\alpha$ در نتیجه داریم :

$$\angle ADB - \angle ABD = ۴\alpha \ , \ \angle ADB + \angle ABD = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \ \angle ADB = ۹۰^\circ + \alpha \ , \ \angle ABD = ۹۰^\circ - ۳\alpha \ \Rightarrow \ \angle DAB + \angle CBA = ۹۰^\circ$$

نقطه P را تقاطع AD و BC می نامیم. به وضوح زاویه APB برابر ۹۰ درجه است. از طرف دیگر می دانیم که زاویه PDC برابر ۴۵ درجه است. پس نتیجه می گیریم که $PD = \frac{\sqrt{۲}}{۲}CD = \frac{BC}{۲}$



حال اگر نقطه Q را قرینه D نسبت به P در نظر بگیریم در این صورت $QD = ۲PD = BC$ می شود. می دانیم که دو مثلث DPB و QPB همنهشت هستند. در نتیجه $\angle CBD = \angle CBQ = \alpha$ پس $\angle ABQ = ۹۰^\circ - \alpha$.
از طرف دیگر $\angle DAB = ۲\alpha$ پس مثلث ABQ متساوی الساقین است. بنابراین :

$$\Rightarrow \ AB = AQ \ \Rightarrow \ AB = DQ + AD = BC + AD$$

.

پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱. ذوزنقه $ABCD$ با شرط $AB \parallel CD$ مفروض است. فرض کنید $\omega_۱$ و $\omega_۲$ دایره هایی به قطر AD و BC باشند. نقاط X و Y را به صورت دلخواه روی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ انتخاب می کنیم. ثابت کنید طول XY بیشتر از نصف محیط ذوزنقه نیست.

مهدی اعتصامی فرد

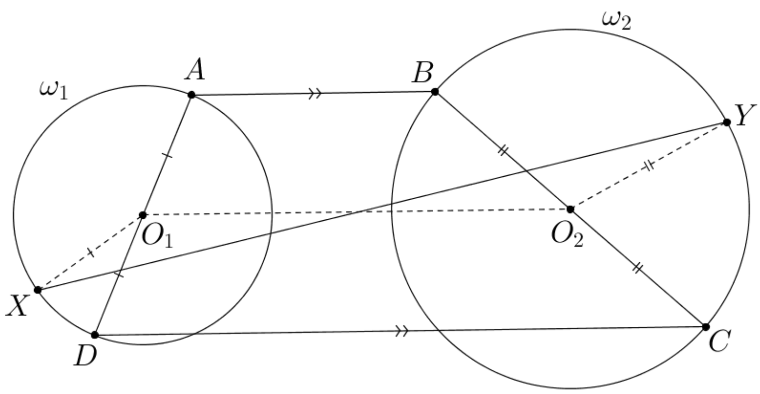
— —

راه حل اول.

نقاط $O_۱$ و $O_۲$ را مراکز دایره های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نظر بگیرید. به وضوح $O_۱$ و $O_۲$ اوساط AD و BC هستند. پس داریم :

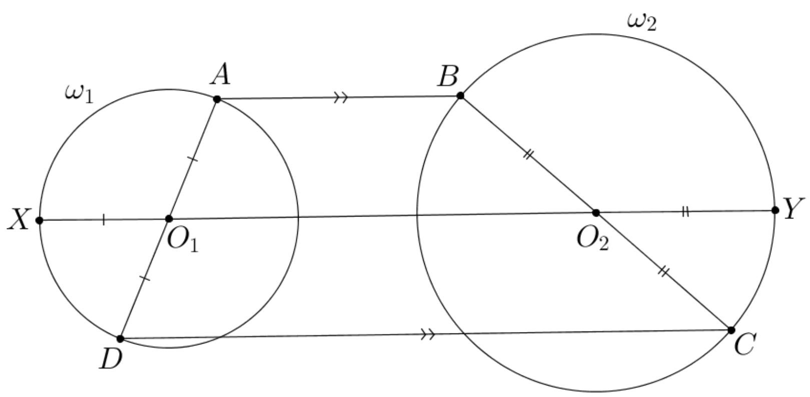
$$XO_۱ = \frac{AD}{۲} \ , \ YO_۲ = \frac{BC}{۲} \ , \ O_۱O_۲ = \frac{AB+CD}{۲}$$

$$\Rightarrow \ XY \leq XO_۱ + O_۱O_۲ + YO_۲ = \frac{AB+BC+CD+DA}{۲}$$



راه حل دوم.
دورترین نقاط دو دایره روی خط المرکزین آن دو قرار دارند. یعنی کافی است نشان دهیم :

$$XY \leq \frac{AB + BC + CD + DA}{۲}$$



و این گزاره نیز واضح است چرا که :

$$XO_۱ = \frac{AD}{۲} \ , \ O_۱O_۲ = \frac{AB + CD}{۲} \ , \ YO_۲ = \frac{BC}{۲}$$

۲. دو دایره $C_۱$ و $C_۲$ در نقاط A و B متقاطعند. از A بر $C_۱$ مماسی رسم می کنیم تا دایره دوم را در P قطع کند. خط PB دایره $C_۱$ را برای بار دوم در Q قطع می کند. (فرض کنید Q خارج دایره $C_۲$ قرار دارد.) از Q مماس QD را بر دایره $C_۲$ رسم می کنیم تا دایره $C_۱$ را در نقطه C قطع کند. (A و D در یک طرف PQ قرار ندارند.) ثابت کنید خط AD نیمساز زاویه CAP است.

ایمان مقصودی

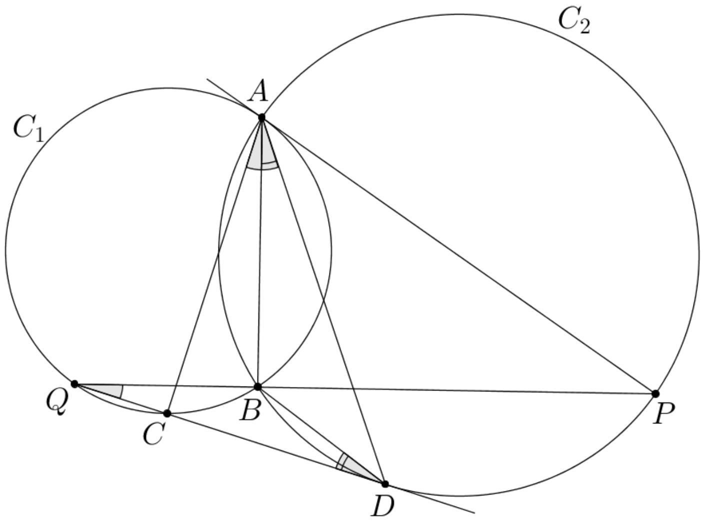
راه حل .

می دانیم که :

$$\angle CAB = \angle CQB \ , \ \angle DAB = \angle BDQ$$

$$\Rightarrow \ \angle CAD = \angle CAB + \angle DAB = \angle CQB + \angle BDQ = \angle PBD = \angle PAD$$

بنابراین AD نیمساز زاویه CAP است.

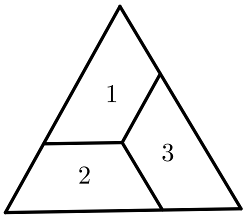


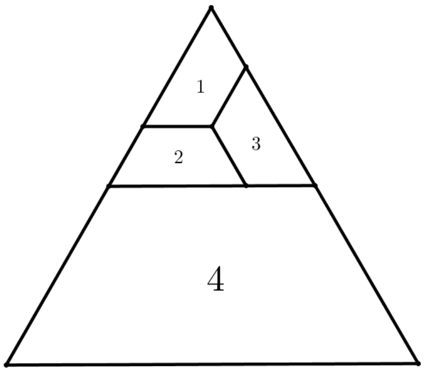
۳. همه اعداد طبیعی n را بیابید به گونه ای که مثلثی وجود داشته باشد که بتوان آن را به n چهارضلعی متشابه افراز کرد.

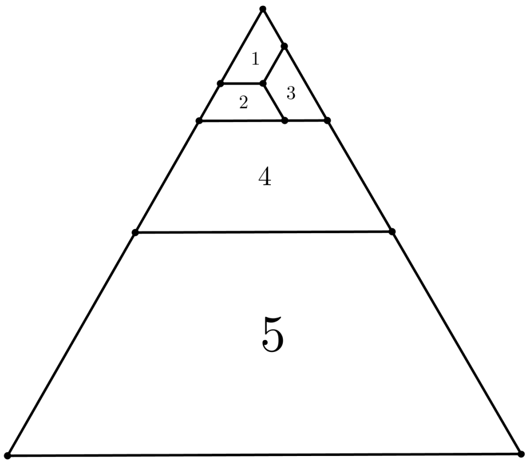
مرتضی ثقفیان - بلوهف

– –

راه حل.
برای $n = 1$ به وضوح چنین مثلثی وجود ندارد. برای $n = 2$ نیز گزاره نادرست است زیرا یکی از ۴ ضلعی ها محدب و دیگری مقعر می شود. برای $n \geq 3$ برای مثلث های متساوی الاضلاغ می توان این کار را به صورت زیر انجام داد :







.
.
.
.

۴. مثلث قائم الزاویه ABC با $\angle A = ۹۰^\circ$ مفروض است. در نقطه A بر دایره محیطی مثلث مماس می کنیم تا BC را در P قطع کند. فرض کنید M وسط کمان AB باشد و PM دایره محیطی را برای بار دوم در Q قطع کند. اگر مماس بر دایره در Q خط AC را در K قطع کند ثابت کنید زاویه PKC برابر ۹۰ درجه است.

داوود وکیلی

– –

راه حل .

دو حالت در نظر بگیرید. برای حالت اول فرض کنید $AB < AC$. در این صورت کافی است نشان دهیم PK موازی AB است. حال داریم :

$$\triangle PMA \sim \triangle PAQ \;\Rightarrow\; \frac{AQ}{MA} = \frac{PQ}{PA} \;,\; \triangle PMB \sim \triangle PCQ \;\Rightarrow\; \frac{MB}{QC} = \frac{PB}{PQ}$$

$$\triangle PBA \sim \triangle PAC \;\Rightarrow\; \frac{AC}{BA} = \frac{PA}{PB}$$

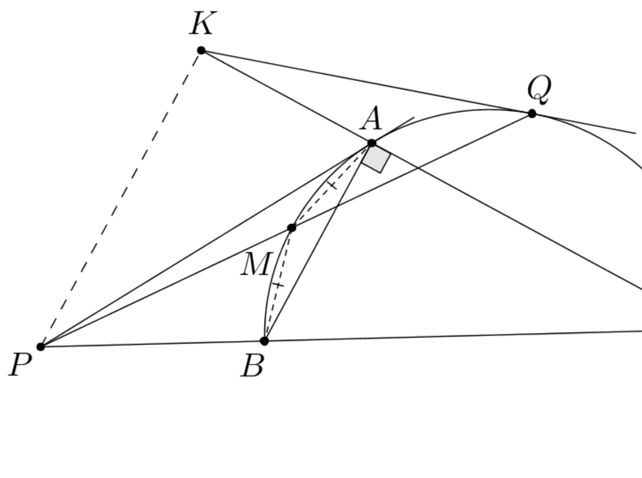
از آنجایی که MA با MB برابر است، بنابر تساوی های بالا داریم :

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{BA}{AC} \quad (۱)$$

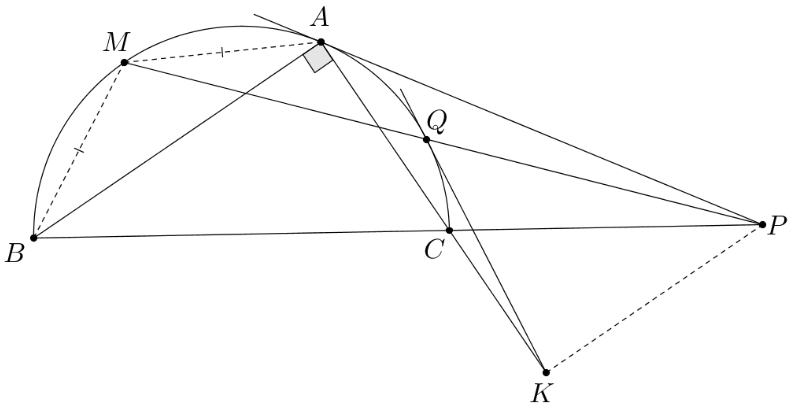
$$\triangle KAQ \sim \triangle KQC \;\Rightarrow\; \frac{KA}{KQ} = \frac{KQ}{KC} = \frac{AQ}{QC} \;\Rightarrow\; \frac{KA}{KC} = (\frac{AQ}{QC})^{۲} \quad (۲)$$

$$\triangle PBA \sim \triangle PAC \;\Rightarrow\; \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} = \frac{BA}{AC} \;\Rightarrow\; \frac{PB}{PC} = (\frac{BA}{AC})^{۲} \quad (۳)$$

$$(۱), (۲), (۳) \;\Rightarrow\; \frac{KA}{KC} = \frac{PB}{PC} \;\Rightarrow\; PK \parallel AB$$



برای حالت دوم اگر فرض کنیم $AC < AB$ باشد، به طریق مشابه نشان داده می شود که PK موازی AB است.



۵. دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در A و B متقاطعند. مماس بر دایره $\omega_۱$ در A دایره $\omega_۲$ را در C و مماس بر دایره $\omega_۲$ در A دایره $\omega_۱$ را در D قطع می کند. اگر نیمساز داخلی زاویه CAD دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را در E و F و نیمساز خارجی آن دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را در X و Y قطع کند ثابت کنید عمود منصف XY بر دایره محیطی مثلث BEF مماس است.

مهدی اعتصامی فرد

\- -

راه حل.

نقطه P را محل تقاطع XE و YF در نظر بگیرید. حال داریم :

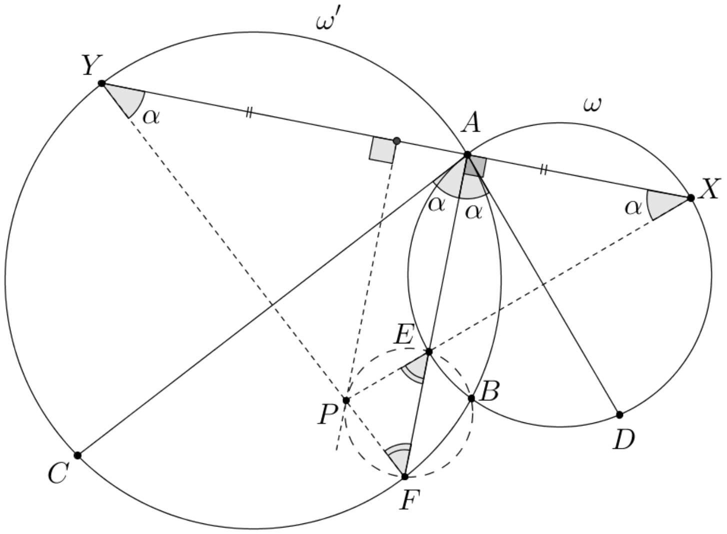
$$\angle EXA = \angle EAC = \angle EAD = \angle FYA = \alpha \;\; \Rightarrow \;\; PX = PY$$

$$\angle ABE = \angle EXA = \alpha \;,\;\; \angle ABF = ۱۸۰^\circ - \angle FYA = ۱۸۰^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \;\; \angle EBF = \angle XPY = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha \;\; \Rightarrow \;\; PEBF : cyclic$$

$$EF \perp XY \;\; \Rightarrow \;\; \angle PEF = \angle AEX = \angle AFY \;\; \Rightarrow \;\; PE = PF$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $PE = PF$ و چهارضلعی $PEBF$ محاطی است. پس نقطه P وسط کمان EF از دایره محیطی مثلث BEF است. همچنین می دانیم که عمودمنصف XY موازی EF است و از نقطه P می گذرد. بنابراین عمود منصف XY بر دایره محیطی مثلث BEF در نقطه P مماس است.



آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

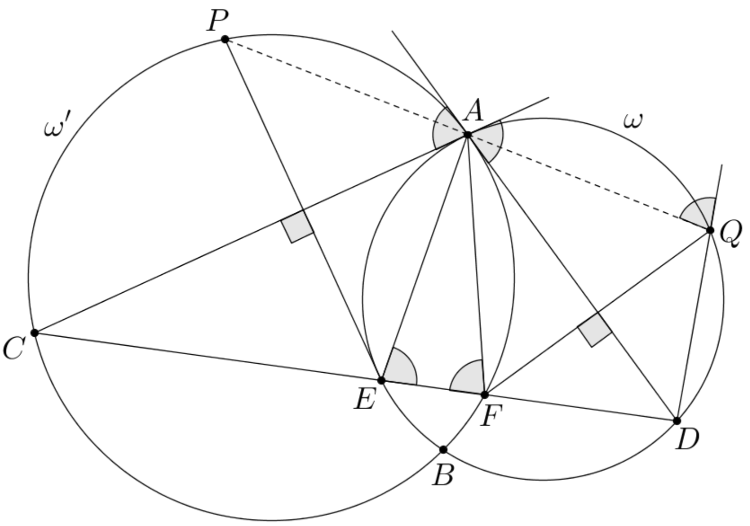
۱. دو دایره ω_1 و ω_2 در A و B متقاطعند. مماس بر دایره ω_1 در A دایره ω_2 را در C و مماس بر دایره ω_2 در A دایره ω_1 را در D قطع می کند. فرض کنید خط CD، ω_1 و ω_2 را به ترتیب در E و F قطع کند.(E بین C و F قرار دارد.) از E بر AC عمود می کنیم تا ω_2 را در P و از F بر AD عمود می کنیم تا ω_1 را در Q قطع کند. ثابت کنید A و P و Q همخطند.

مهدی اعتصامی فرد

راه حل.
می دانیم که :

$$\angle AFC = \angle AED = ۱۸۰^\circ - \angle CAD \ , \ \angle AEF = ۱۸۰^\circ - \angle AQD$$

$$\Rightarrow \ \angle AFD = \angle AQD$$



بنابراین نقطه Q قرینه نقطه F نسبت به خط AD است.به صورت مشابه می توان گفت نقطه P نیز قرینه نقطه E نسبت به خط AC است. در نتیجه :

$$\angle DAQ = \angle DAF = \angle ACD \ , \ \angle CAP = \angle CAE = \angle CDA$$

$$\Rightarrow \angle DAQ + \angle CAD + \angle CAP = \angle ACD + \angle CAD + \angle CDA = ۱۸۰^\circ$$

پس نقاط A و P و Q هم خطند.

۲. مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید M وسط ضلع AC و D پای ارتفاع وارد شده بر ضلع BC باشد. نقطه X را به گونه ای در نظر می گیریم که زاویه های AXB و DXM برابر ۹۰° باشند. (X و C در دو طرف BM قرار دارند.) ثابت کنید زاویه XMB دو برابر زاویه MBC است.

داوود وکیلی

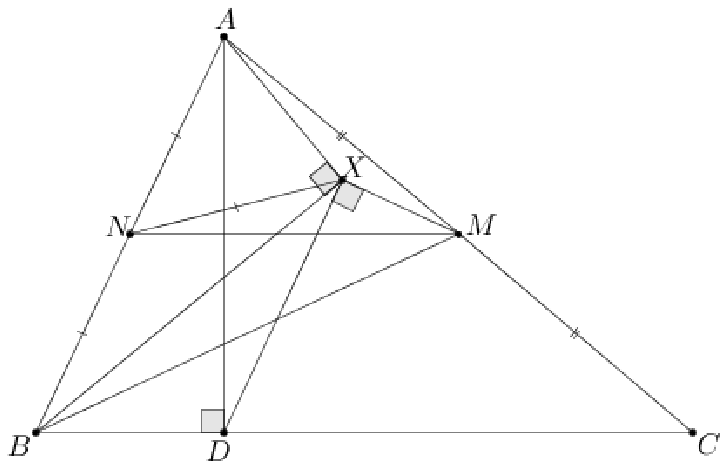
راه حل اول.

فرض کنید N وسط ضلع AB باشد. بنابراین MN موازی ضلع BC است و $\angle MBC = \angle NMB$. بنابراین کافی است نشان دهیم که MN نیمساز زاویه XMB است. حال داریم :

$$\angle ADB = \angle AXB = ۹۰^\circ \ \Rightarrow \ AXDB : cyclic$$

$$\Rightarrow \ \angle BXD = \angle BAD = ۹۰^\circ - \angle ABC \ \Rightarrow \ \angle BXM = \angle BNM = ۱۸۰^\circ - \angle ABC$$

$$\Rightarrow \ BNXM; cyclic \ , \ AN = NX = BN \ \Rightarrow \ \angle BMN = \angle XMN$$



راه حل دوم.

محل تقاطع XM و BC را P بنامید. نقطه Q را طوری در نظر بگیرید که چهارضلعی $ADBQ$ مستطیل شود. می دانیم که :

$$\angle DXP = \angle ADP = ۹۰^\circ \;\Rightarrow\; \angle ADX = \angle XPD$$

همچنین می دانیم که پنج ضلعی $AXDBQ$ محاطی است. پس داریم :

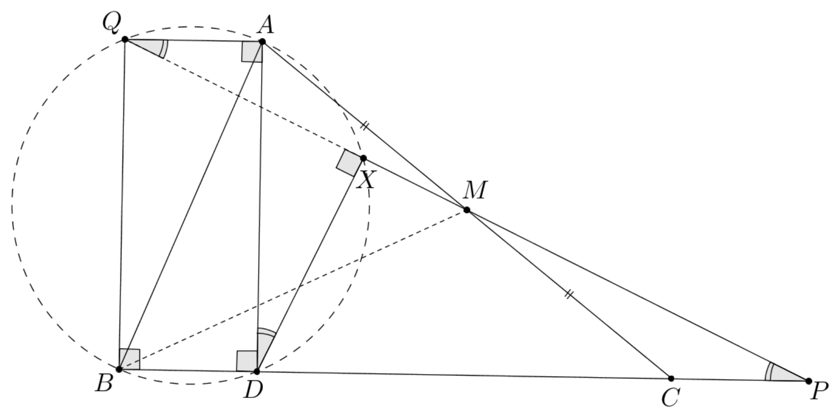
$$\angle ADX = \angle AQX \;\Rightarrow\; \angle AQX = \angle XPD$$

بنابراین از توازی AQ و BP نتیجه می شود Q و X و P همخطند. داریم :

$$AM = MC \ and \ AQ \parallel BP \;\Rightarrow\; QM = MP$$

کافیست نشان دهیم که $\angle QBC = ۹۰^\circ$. داریم :

$$QM = BM = MP \;\Rightarrow\; \angle XMB = ۲\angle MBC$$



راه حل سوم.
نقطه P را تقاطع XM و BC در نظر بگیرید. داریم :

$$\angle ADB = \angle AXB = ۹۰^\circ$$

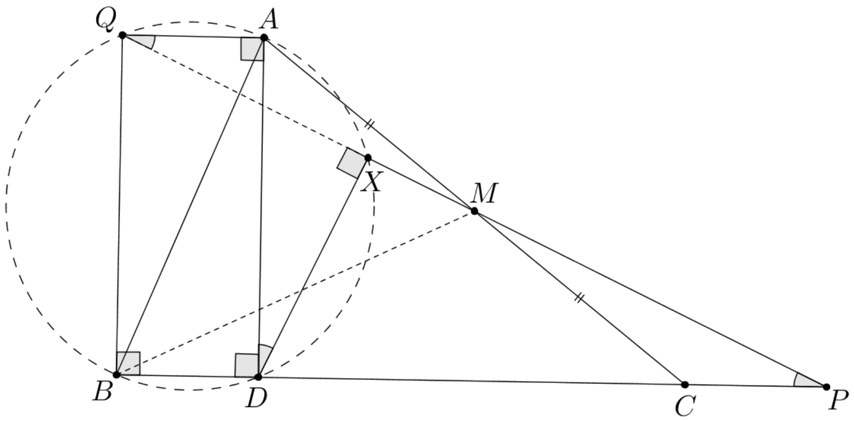
$$\Rightarrow \ \angle BXD = \angle BAD = ۹۰^\circ - \angle B \ \ (۱)$$

حال فرض کنید نقطه N وسط پاره خط DC باشد.می دانیم که MN بر DC عمود است چرا که $AM = MC = MD$. پس چهارضلعی $DXMN$ محاطی است. بنابراین داریم :

$$\angle DXN = \angle DMN = \angle NMC = ۹۰^\circ - \angle C \ \ (۲)$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲) می توان گفت :

$$\angle BXN = \angle BXD + \angle DXN = (\ ۹۰^\circ - \angle B\ ) + (\ ۹۰^\circ - \angle C\ ) = \angle A \ \ (۴)$$



از طرف دیگر داریم :

$$\frac{XN}{AM} = \frac{XN}{DM} = sin\angle XDN = sin\angle BAX = \frac{BX}{AB} \ \ (۵)$$

با توجه به معادلات (۴) و (۵) می توان گفت دو مثلث BXN و BAN متشابهند. پس داریم :

$$\angle XMD = \angle XNB = \angle AMB \ \ \Rightarrow \ \ \angle BMD = \angle XMA = \angle CMP$$

پس MN عمود منصف BP است.

۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$، محل برخورد AD و BC را P می نامیم. فرض کنید $I_۱$ و $I_۲$ مراکز دوایر محاطی مثلث های PAB و PDC باشند. اگر مرکز دایره محیطی مثلث PAB را O و مرکز ارتفاعی مثلث PDC را H بنامیم، در این صورت نشان دهید دوایر محیطی مثلث های $AI_۱B$ و DHC بر یکدیگر مماسند اگر و تنها اگر دوایر محیطی مثلث های AOB و $DI_۲C$ بر یکدیگر مماس باشند.

هومن فتاحی مقدم

– –

راه حل.

فرض کنید دوایر محیطی دو مثلث $AI_۱B$ و DHC به یکدیگر در نقطه K مماس باشند. همچنین نقطه Q را دومین محل برخورد دوایر محیطی مثلث های AKD و BKC در نظر بگیرید. می دانیم که :

$$\angle DHC = \angle DKC = ۱۸۰^\circ - \angle P$$

$$\angle P + \angle PDK + \angle PCK = \angle DKC \ \Rightarrow \ \angle PDK + \angle PCK = ۱۸۰^\circ - ۲\angle P$$

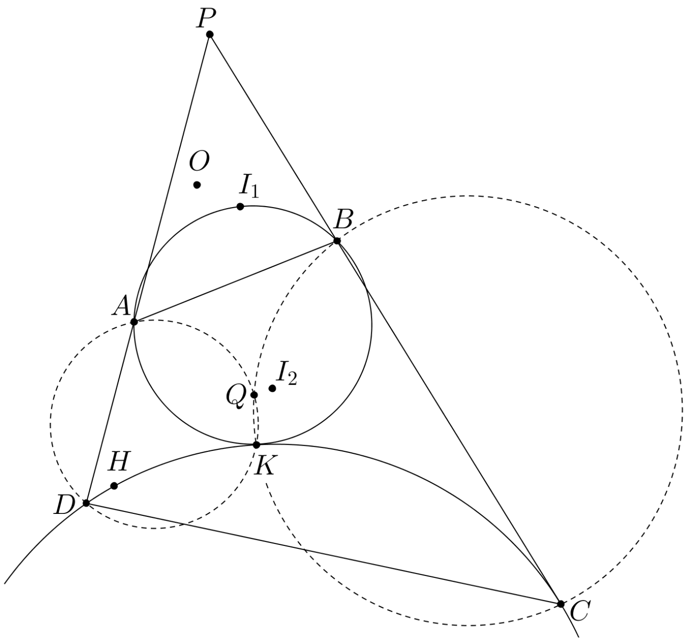
$$AQKD : cyclic \ \Rightarrow \ \angle AQK = ۱۸۰^\circ - \angle PDK$$

$$BQKC : cyclic \ \Rightarrow \ \angle BQK = ۱۸۰^\circ - \angle PCK$$

$$\Rightarrow \ \angle AQB = ۱۸۰^\circ - ۲\angle P = ۱۸۰^\circ - \angle AOB \ \Rightarrow \ AOBQ : cyclic$$

همچنین داریم : $\angle AKD = \angle AQD$ و $\angle BKD = \angle BQC$ و $\angle AQB = \angle DKC$ در نتیجه :

$$\angle CQD = \angle AKB + \angle P = ۱۸۰^\circ - \angle AI_۱B + \angle P = ۹۰^\circ + \frac{\angle P}{۲} = \angle CI_۲D$$



پس چهارضلعی $CDQI_۲$ محاطی است. کافی است ثابت کنیم که دوایر محیطی مثلث های AOB و $DI_۲C$ بر یکدیگر در نقطه Q مماسند. برای اثبات این نشان می دهیم که :

$$\angle ABQ + \angle DCQ = \angle AQD$$

داریم :

$$\angle ABK + \angle DCK = \angle AKD$$

$$\Rightarrow \ (\angle ABQ + \angle KBQ) + (\angle QCD - \angle QCK) = \angle AKD$$

اما می دانیم : $\angle KBQ = \angle QCK$ و $\angle AKD = \angle AQD$. پس :

$$\angle ABQ + \angle DCQ = \angle AQD$$

و خواسته مسئله اثبات می شود.
برای طرف دیگر مسئله، محل برخورد دو دایره مثلث های AOB و DI_2C را Q در نظر بگیرید. K را دومین محل برخورد دوایر محیطی مثلث های AQD و BQC در نظر بگیرید. به طور مشابه می توان نشان داد که دو دایره مثلث های AI_1B و DHC در K به یک دیگر مماسند.

نکته. راه حل دیگری به کمک انعکاس به مرکز نقطه میشل چهارضلعی وجود دارد.

---

۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. خطوط AB و CD یکدیگر را در E و خطوط AD و BC یکدیگر را در F قطع می کنند. P را محل برخورد قطر های چهارضلعی در نظر بگیرید. فرض کنید ω_1 دایره ای است که از D می گذرد، بر AC در P مماس است و AD را در X قطع می کند و ω_2 دایره ای است که از C می گذرد، بر BD در P مماس است و BC را در Y قطع می کند. اگر دو دایره برای بار دوم در Q یکدیگر را قطع کنند ثابت کنید عمود وارد از P بر EF از مرکز دایره محیطی مثلث XQY می گذرد.

ایمان مقصودی

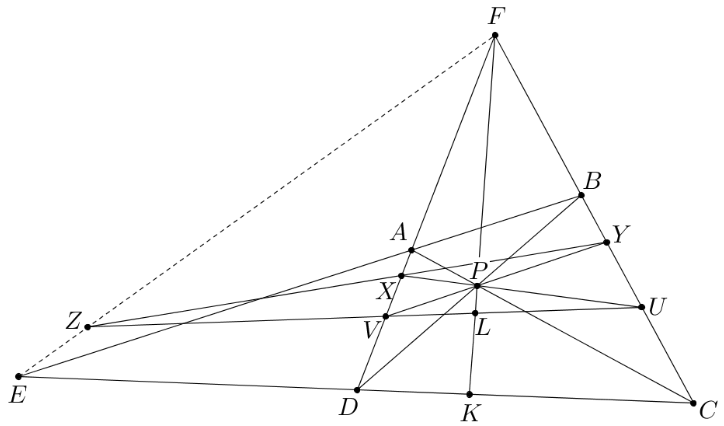
— —

راه حل اول. لم اول. در چهارضلعی محدب $ABCD$، خطوط AB و CD در نقطه E و خطوط AD و BC در نقطه F یکدیگر را قطع می کنند. نقطه P را تقاطع AC و BD در نظر بگیرید. فرض کنید X و Y نقاط دلخواهی روی AD و BC باشند. اگر تقاطع BC و PX را U و تقاطع AD و PY را V بنامیم آنگاه خطوط XY و UV و EF همرسند.

اثبات.
نقطه Z را تقاطع XY و UV در نظر بگیرید. تقاطع PF و UV را L و تقاطع PF و CD را K بنامید. میدانیم که :

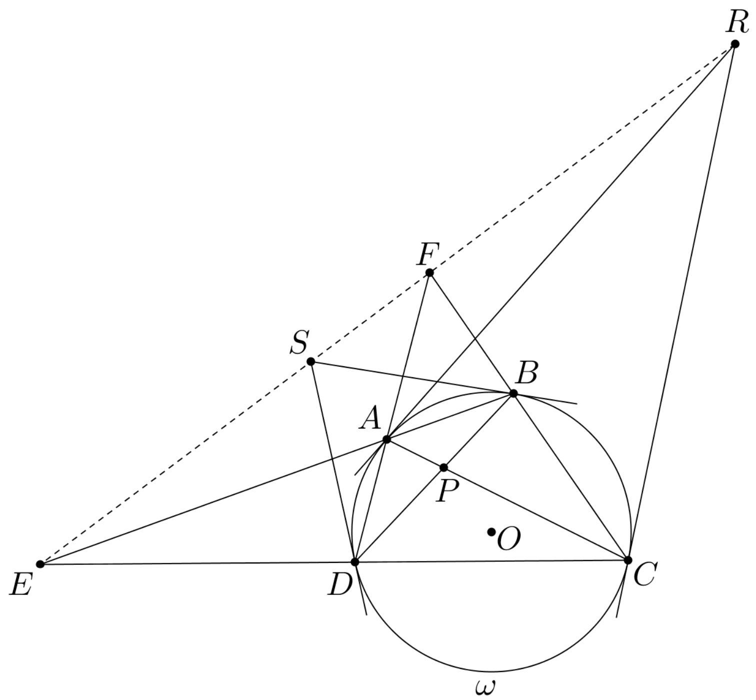
$$(Z, L, V, U) = -1 \ , \ (E, K, D, C) = -1$$

اگر XF، CD را در E' قطع کند در این صورت $(E', K, D, C) = -1$. پس E و E' یکی هستند و لم اثبات می شود.



لم دوم. در چهارضلعی محاطی $ABCD$ با مرکز O، خطوط AB و CD یکدیگر را در E و خطوط AD و BC یکدیگر را در F قطع می کنند. نقطه P را محل تقاطع AC و BD بگیرید. در این صورت PO بر EF عمود است.

اثبات.
ω را دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه R محل تلاقی مماس های وارد بر دایره از A و C و نقطه S محل تلاقی مماس های وارد بر دایره از B و D باشد.
با توجه به قضیه پاسکال در شش ضلعی های $AABCCD$ و $ABBCDD$ نتیجه می گیریم که نقاط R و S روی EF قرار دارند.



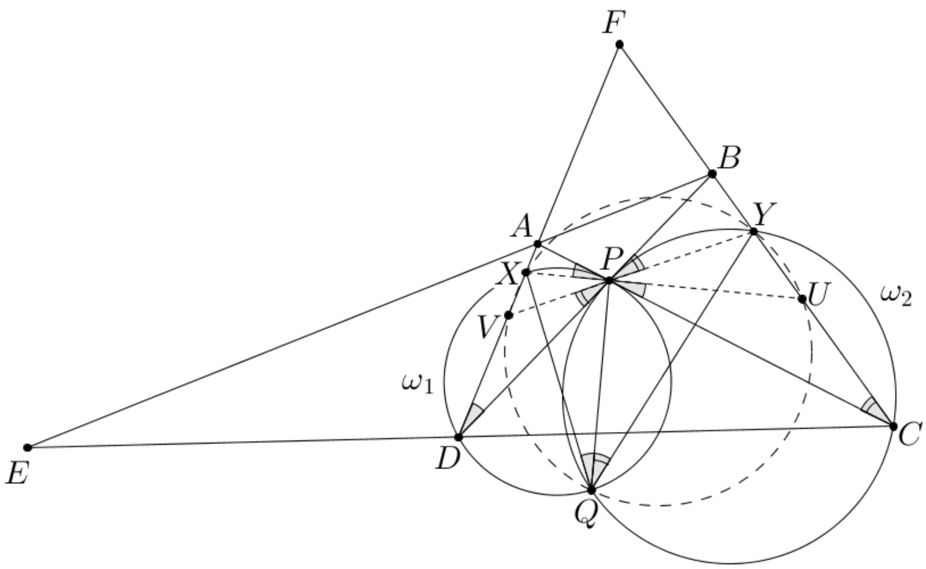
می دانیم که قطبی نقطه R نسبت به دایره ω از P می گذرد. بنابراین قطبی نقطه P نیز نسبت به دایره از نقطه R می گذرد. به طور مشابه می توان گفت قطبی نقطه P نسبت به دایره از نقطه S نیز می گذرد. در نتیجه قطبی نقطه P نسبت به دایره همان خط EF است. یعنی OP بر EF عمود است.

حال فرض کنید PX، BC را در نقطه U و PY، AD را در نقطه V قطع کند. داریم :

$$\angle XQP = \alpha \;\Rightarrow\; \angle XDP = \angle XPA = \angle UPC = \alpha$$

$$\angle YQP = \theta \;\Rightarrow\; \angle YCP = \angle YPB = \angle VPD = \theta$$

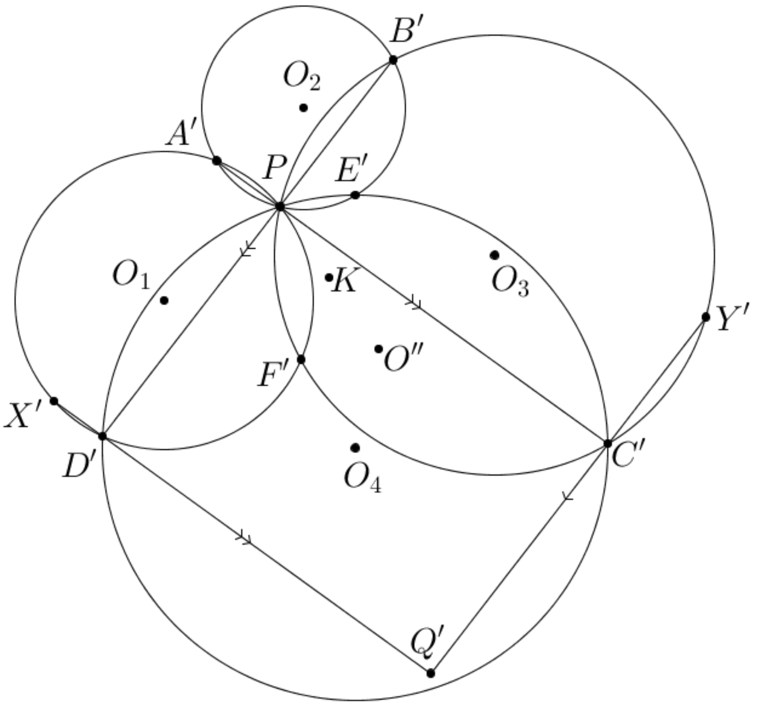
$$\Rightarrow\; \angle XVY = \angle XQY = \angle XUY = \alpha + \theta \;\Rightarrow\; QVXYU : cyclic$$



نقطه O را مرکز دایره محیطی پنج ضلعی $QVXYU$ در نظر بگیرید. با توجه به لم اول می توان گفت XY و UV و EF در نقطه Z همرسند. حال با توجه به لم ۲ می توان گفت که PO بر FZ عمود است. پس عمود وارد از P بر EF از مرکز دایره محیطی مثلث XQY می گذرد.

راه حل دوم.

فرض کنید نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث XQY باشد. انعکاس به مرکز P شکل سوال را به شکل زیر تبدیل می کند. نقاط پریم دار را انعکاس یافته نقاط اصلی در نظر بگیرید. کافیست نشان دهیم که خط PO' قطر دایره محیطی مثلث $E'PF'$ است. نقطه O'' را مرکز دایره محیطی مثلث $X'Q'Y'$ بگیرید. می دانیم نقاط P و O' و O'' هم خطند. پس باید نشان دهیم خط PO'' قطر دایره محیطی مثلث $E'PF'$ است.



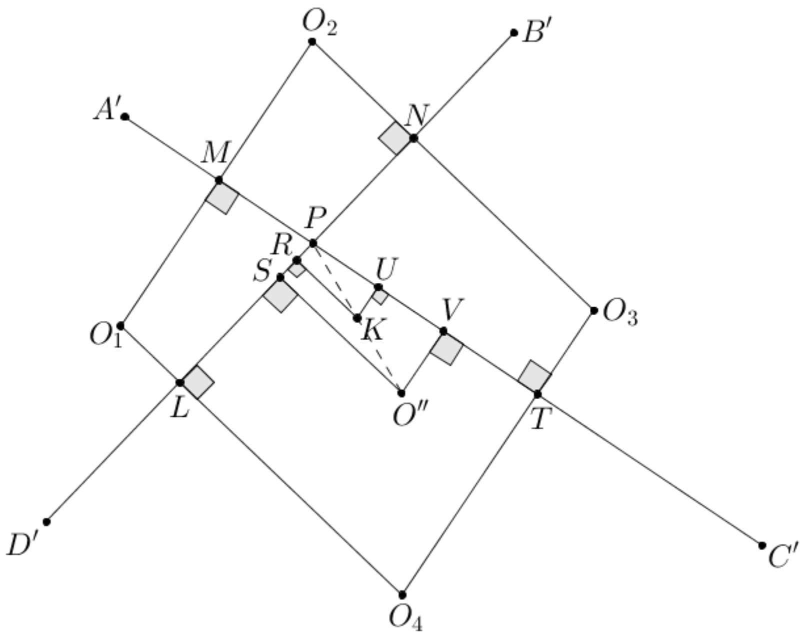
فرض کنید O_1 و O_2 و O_3 و O_4 مراکز دوایر محیطی شکل بالا باشند و K را محل برخورد O_1O_3 و O_2O_4 در نظر بگیرید. می دانیم که نقطه K روی عمود منصف PE' و PF' قرار دارد. پس K مرکز دایره محیطی مثلث $PE'F'$ است. بنابراین باید نشان دهیم P و K و O'' همخطند. از طرف دیگر، می دانیم چهارضلعی $D'B'Y'Q'$ یک ذوزنقه متساوی الساقین است. پس نقطه O'' روی عمودمنصف $B'D'$ قرار دارد. به صورت مشابه نقطه O'' روی عمودمنصف $A'C'$ قرار دارد. پس نقطه O'' محل برخورد $A'C'$ و $B'D'$ است.

حال داریم :

$$A'C' \cap O_۱O_۲ = M \ , \ A'C' \cap O_۳O_۴ = T$$

$$B'D' \cap O_۲O_۳ = N \ , \ B'D' \cap O_۱O_۴ = L$$

نقاط U و V را روی $A'C'$ به صورتی در نظر بگیرید که KU بر $A'C'$ و $O''V$ بر $A'C'$ عمود باشند. همچنین نقاط R و S را روی $B'D'$ به صورتی در نظر بگیرید که KR و $O''S$ بر $B'D'$ عمود باشند.



می دانیم که $O_۱O_۲$ و $O_۳O_۴$ بر $A'C'$ عمودند. پس $O_۱O_۲$ موازی $O_۳O_۴$ است. به طور مشابه $O_۲O_۳$ موازی $O_۱O_۴$ است. بنابراین چهارضلعی $O_۱O_۲O_۳O_۴$ یک متوازی الاضلاع است. از این موضوع نتیجه می گیریم که نقطه K روی وسط دو پاره خط $O_۱O_۲$ و $O_۳O_۴$ قرار دارد. پس $UM = UT$. همچنین نتیجه می گیریم که $A'M = PM$ و $C'T = PT$.

$$\Rightarrow \ \ PO'' = A'O'' - A'P = (PM + PT) - ۲PM = PT - PM$$

$$\Rightarrow \ \ TO'' = PT - PO'' = PM \ \ \Rightarrow \ \ UP = UV$$

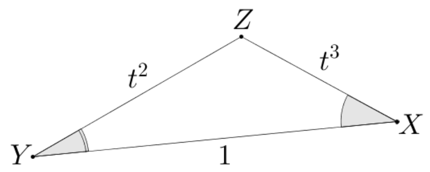
به طور مشابه می توان نشان داد که $RP = RS$. پس نقطه K روی عمودمنصف PV و PS قرار دارد. در نتیجه نقطه K مرکز دایره محیطی مثلث PSV است. پس نقاط P و K و O'' هم خطند.

۵. آیا شش نقطه X_1، X_2، Y_1، Y_2، Z_1، و Z_2 در صفحه وجود دارند به صورتی که برای هر $1 \le i, j, k \le 2$، مثلث های $X_iY_jZ_k$ متشابه باشند؟

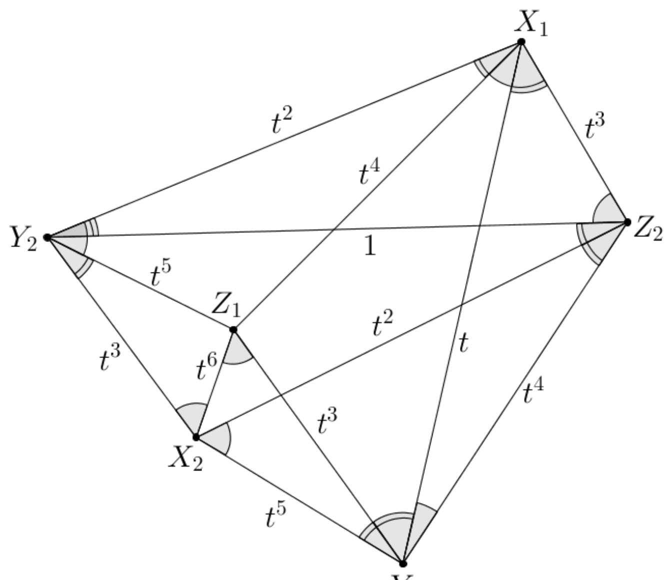
مرتضی ثقفیان

راه حل. (از ایلیا بوگدانف- روسیه)

فرض کنید در مثلث XYZ، $XY = 1$ و $YZ = t^2$ و $ZX = t^3$ و $\angle Z = \angle X + 2\angle Y$.



برای کمرین مقدار ممکن t، می دانیم که $\angle Z > \angle X + 2\angle Y$ و برای $t = 1$ می دانیم $\angle Z < \angle X + 2\angle Y$. پس یک مثلث با این مشخصات موجود است. حال شش نقطه زیر را در نظر بگیرید :



این نقاط خواص گفته شده در صورت مسئله را دارند و در شرط مسئله صدق می کنند.