بسم الله الرحمن الرحیم

مجموعه سوالات هندسه
المپیاد ریاضی ایران
مرحله دوم
(۱۳۷۵-۱۳۹۵)

www.igo-official.ir
@igo_official

بسم الله الرحمن الرحیم

اردیبهشت ۱۳۷۵

۱) فرض کنید a ، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

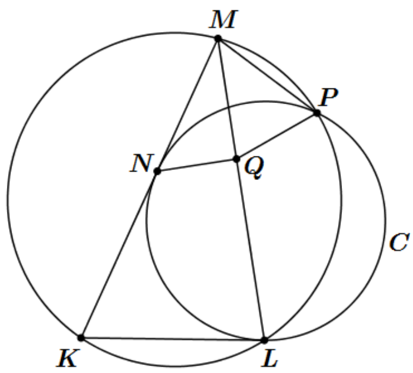
$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 > 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

ثابت کنید a ، b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۲) مثلث ABC مفروض است. نقاطی مانند D و E را خارج مثلث ABC در نظر می‌گیریم، به طوری که مثلث‌های ADB و AEC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشند ($\hat{D}=\hat{E}=90^\circ$). اگر F نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید مثلث DEF نیز قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

اردیبهشت ۱۳۷۶

۳) فرض کنید KL و KN بر دایره‌ی C مماس باشند. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه‌ی دیگر تقاطع دایره‌ی C با دایره‌ی محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم. ثابت کنید: $\angle MPQ = 2\angle KML$



۴) در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده‌اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر $BE=CF$، آن‌گاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

اردیبهشت ۱۳۷۷

۵) مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. I مرکز دایره‌ی محاطی آن و D نقطه‌ی تقاطع AI با دایره‌ی محیطی ABC است. فرض کنید E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{1}{2} AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۶) مثلث ABC که در آن $BC > CA > AB$ مفروض است. نقطه‌ی D را روی ضلع BC و نقطه‌ی E را روی امتداد ضلع AB (نزدیک A) طوری در نظر می‌گیریم که $BD = BE = AC$. دایره‌ی محیطی مثلث BED ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع می‌کند و BP نیز دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. ثابت کنید: $AQ + CQ = BP$

اردیبهشت ۱۳۷۸

۷) مثلث ABC را با فرض $\angle B > ۴۵^\circ$ و $\angle C > ۴۵^\circ$ در نظر می‌گیریم. مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین CAM و BAN را در خارج ABC طوری می‌سازیم که $\angle CAM = \angle BAN = ۹۰^\circ$، و در داخل مثلث ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین BPC را طوری می‌سازیم که $\angle P = ۹۰^\circ$. ثابت کنید که مثلث MPN نیز یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۸) مثلث ABC مفروض است. نقاط P، Q و R به ترتیب روی AB، BC و CA قرار دارند. حال نقاط A'، B' و C' را به ترتیب روی PR، QP و RQ طوری در نظر می‌گیریم که AB با $A'B'$، BC با $B'C'$ و CA با $C'A'$ موازی باشند.
ثابت کنید که:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{S_{PQR}}{S_{A'B'C'}}$$

اردیبهشت ۱۳۷۹

۹) نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و فقط اگر:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

(مرکز ثقل یک مثلث، محل تلاقی سه میانه‌ی آن مثلث است.)

۱۰) می‌دانیم در چهاروجهی $ABCD$، مجموع زاویه‌های هر راس برابر ۱۸۰° درجه است.
(مثلاً در رأس A، $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = ۱۸۰^\circ$) نشان دهید که وجوه این چهاروجهی، چهار مثلث برابرند.

اردیبهشت ۱۳۸۰

۱۱) مثلث حاده‌الزاویه ABC مفروض است. روی اضلاع آن، سه مثلث $B'AC$، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم به‌طوری‌که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = ۳۰^\circ$$

$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = ۶۰^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد، نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۱۲) تمام n هایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن‌ها افقی و عمودی باشد و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

۱۳) در مثلث ABC ($AB > AC$) نیمسازهای راس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند، هم چنین نقطه تقاطع دو نیمساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

اردیبهشت ۱۳۸۱

۱۴) در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = ۱۳۵^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (یا امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = ۹۰^\circ$، همچنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۱۵) A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهارضلعی محدب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC = ۹۰^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد، به طوری که هر چهارضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم، خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

اردیبهشت ۱۳۸۲

۱۶) در یک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq ۳$) به طوری که همه‌ی آن‌ها روی یک خط قرار ندارند. می‌خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطه‌ی A مناسب‌تر از نقطه‌ی B است، اگر مجموع فواصل A تا خانه‌ها، کمتر از مجموع فواصل B تا خانه‌ها باشد. نقطه‌ای را «*ایده‌آل*» می‌گوییم که هیچ نقطه‌ای مناسب‌تر از آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۱۷) زاویه‌ی A کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC می‌باشد. نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC واقع است. عمود منصف‌های AB و AC با خط AD به ترتیب در نقاط M و N برخورد می‌نمایند. نقطه‌ی T محل برخورد BM و CN است. ثابت کنید:

$$BT + CT \leq ۲R$$

(که R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.)

اردیبهشت ۱۳۸۳

۱۸) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، نقطه‌ی D محل برخورد نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC و نقطه‌ی I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر زاویه‌ی A است (I_a محل برخورد نیمسازهای زوایای خارجی B و C است). ثابت کنید:

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{۲} - ۱$$

۱۹) نیمساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC، ضلع BC و دایره‌ی محیطی مثلث ABC را، به ترتیب، در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه‌ی D دایره‌ی به مرکز M و به شعاع MB را در X و Y قطع کرده است. ثابت کنید خط AD زاویه‌ی XAY را نصف می‌کند.

اردیبهشت ۱۳۸۴

۲۰) در مثلث ABC، $\hat{A} = 60^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۲۱) BC قطر یک دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که $CY \parallel PB$ و $CX \parallel MP$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید: $PB \perp MK$

اردیبهشت ۱۳۸۵

۲۲) فرض کنید دایره‌ی C_2 از مرکز دایره‌ی C_1 گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دلخواهی از C_1 و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی C_2 باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره‌ی C_1 است.

۲۳) نقاط A، B، C و D، با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M، که

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$$

چهار تاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمودند.

اردیبهشت ۱۳۸۶

۲۴) در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیمساز زاویه‌ی ACB است.

۲۵) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' بر دایره‌ی C_1 را به ترتیب، N و N' می‌نامیم. نشان دهید:

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

اردیبهشت ۱۳۸۷

۲۶) فرض کنید I_a مرکز دایره محاطی خارجی مثلث ABC ، متناظر با راس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC، به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC است.

۲۷) فرض کنید در مثلث ABC، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به‌دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره محیطی ABC باشد و $AC = 2OT$، آن‌گاه $AB = 2OT'$.

اردیبهشت ۱۳۸۸

۲۸) فرض کنید نیمساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید: $\angle PAQ \geq \hat{A}$

اردیبهشت ۱۳۸۹

۲۹) دایره‌های W_1 و W_2 در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی W_1 و W_2 هستند به‌طوری‌که AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی W_2 را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$\angle DPM = \angle BDC$$

۳۰) در مثلث ABC، $\hat{A} = 60^\circ$ است. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.

اردیبهشت ۱۳۹۰

۳۱) در مثلث ABC داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ را در نقطه‌ی D قطع کند. همچنین از رأس C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle ABC$ را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید $\angle BED \leq ۳۰^\circ$.

۳۲) اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده‌ی l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینه‌ی l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD+CE=DE$ آن‌گاه $BD'+CE'=D'E'$.

اردیبهشت ۱۳۹۱

۳۳) دایره‌ی $C_۱$ و نقطه‌ی O روی آن مفروض است. دایره‌ی $C_۲$ به مرکز O، دایره‌ی $C_۱$ را در دو نقطه‌ی P و Q قطع می‌کند. $C_۳$ دایره‌ای است که در نقطه‌ی R بر $C_۲$ مماس خارج و در نقطه‌ی S بر $C_۱$ مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطه‌ی Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با $C_۱$ را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۳۴) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس است. قرینه‌ی نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

اردیبهشت ۱۳۹۲

۳۵) مثلث دلخواه ABC داده شده است. وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطه‌ی O، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایره‌ی محیطی در نقطه‌ی N تلاقی کند، آن‌گاه $NK=NL$.

۳۶) فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطه‌ی K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایره‌ی محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایره‌ی C را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. قرینه‌ی P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

اردیبهشت ۱۳۹۳

۳۷) مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطه‌ی N و P، به ترتیب روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطه‌ی Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده است که $\angle NCB = \angle QPN$. ثابت کنید:

$$\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle PQA$$

اردیبهشت ۱۳۹۴

۳۸) دایره‌ی دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر P محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

۳۹) در چهارضلعی $ABCD$، AC نیمساز زاویه‌ی A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است.)

اردیبهشت ۱۳۹۵

۴۰) مثلث ABC با دایره‌ی محیطی ω_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطه‌ی A مماسی بر دایره‌ی ω_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی E قطع کند. دایره‌ی ω_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطه‌ی C بر ضلع AC مماس باشد و هم‌چنین از نقطه‌ی B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطه‌ی F قطع می‌کند. از نقطه‌ی E مماس EK را بر دایره‌ی ω_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایره‌ی ω_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

۴۱) چهارضلعی $ABCD$ و نقطه‌ی T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BCD$ است و داریم:

$$\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC \qquad , \qquad \angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$$

ثابت کنید $\angle BAT = \angle DAC$.

ستاره‌ای از آسمان نهج‌البلاغه:

«کار اندکی که با اشتیاق تداوم یابد، بهتر از کار فراوانی است که رنج‌آور باشد.»

«توفیق تنها از جانب اوست»