سپیده اژدری
دانشجوی کارشناسی
مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف

نقاط بروکارد

در کنار نقطه‌هایی مانند مراکز دوایر محاطی و محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل مثلث، که نقاط معروفی در مثلث‌ها به شمار می‌آیند و بخش زیادی از هندسه‌ی اقلیدسی به به آن‌ها و خواصشان اختصاص دارد، نقاطی که با عنوان «نقاط بروکارد[1]» شناخته می‌شوند نیز نقطه‌هایی با ویژگی‌های جالب هستند. در این مقاله سعی می‌کنیم با این نقاط و برخی از ویژگی‌های آن‌ها آشنا شویم.

نقطه‌ی P درون مثلث ABC را «نقطه‌ی بروکارد اول» می‌نامیم، هرگاه:

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA.$$

و به طور مشابه برای «نقطه‌ی بروکارد دوم» باید داشته باشیم: (به شکل ۱ توجه کنید.)

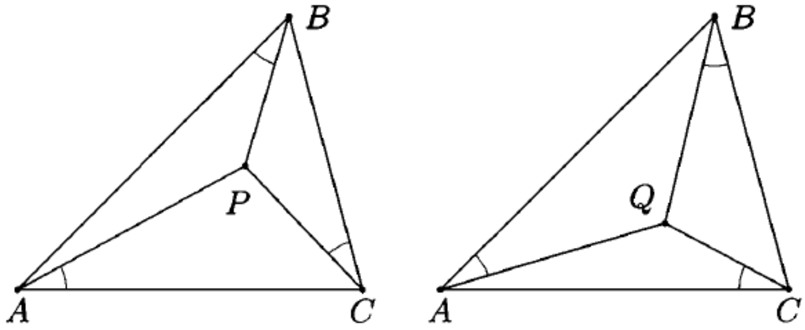
$$\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC.$$

قبل از هر توضیح بیش‌تر، وجود و یکتایی این نقاط را اثبات می‌کنیم:

با نقطه‌ی بروکارد اول شروع می‌کنیم. مشابه شکل شماره ۲ روی اضلاع مثلث ABC مثلث‌های $A_1BC,\ AB_1C, ABC_1$ را متشابه با آن رسم می‌کنیم. (به جهت مثلث‌های جدید توجه کنید.)
از آن‌جایی که $\angle PCB = \angle C - \angle PCA$ و روابط $\angle PAC = \angle PCB$ و $\angle PAC = \angle C - \angle PCA$ نیز برقرار هستند

این مقاله ترجمه‌ی (همراه با تصرف) فصل چهاردهم از برگردان انگلیسی یک کتاب روسی با عنوان زیر است:
V. V. Prasolov, Essays on numbers and figures, Translated from the 1997 Russian original by A. B. Sossinski. Mathematical World, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[1] Brocard Points



شکل ۱. نقاط بروکارد

خواهیم داشت:

$$\angle C = \angle PAC + \angle PCA = \pi - \angle APC.$$

برای نقطه‌های درون مثلث ABC این رابطه برای نقطه‌ای صدق می‌کند که روی دایره‌ی محیطی AB_1C باشد. با بررسی بقیه‌ی زاویه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که P نقطه‌ی بروکارد است، اگر و تنها اگر روی دوایر محیطی مثلث‌های A_1BC, AB_1C, ABC_1 باشد. حال برای رسیدن به حکم مورد نظر نشان می‌دهیم که این سه دایره دقیقاً در یک نقطه اشتراک دارند. فرض کنید P_1 محل برخورد دوایر محیطی A_1BC, AB_1C متمایز از C باشد.خواهیم داشت:

$$\angle AP_1B = 2\pi - \angle AP_1C - \angle CP_1B = \gamma + \beta = \pi - \angle AC_1B.$$

طبق بالا خواهیم داشت که P_1 روی دایره محیطی ABC_1 قرار دارد و بنابراین P_1 همان P نقطه‌ی بروکارد است.
با توجه به شکل بالا و برقرار بودن روابط

$$\angle ABC = \angle BA_1C, \quad \angle BCA = \angle CB_1A, \quad \angle CAB = \angle AC_1B.$$

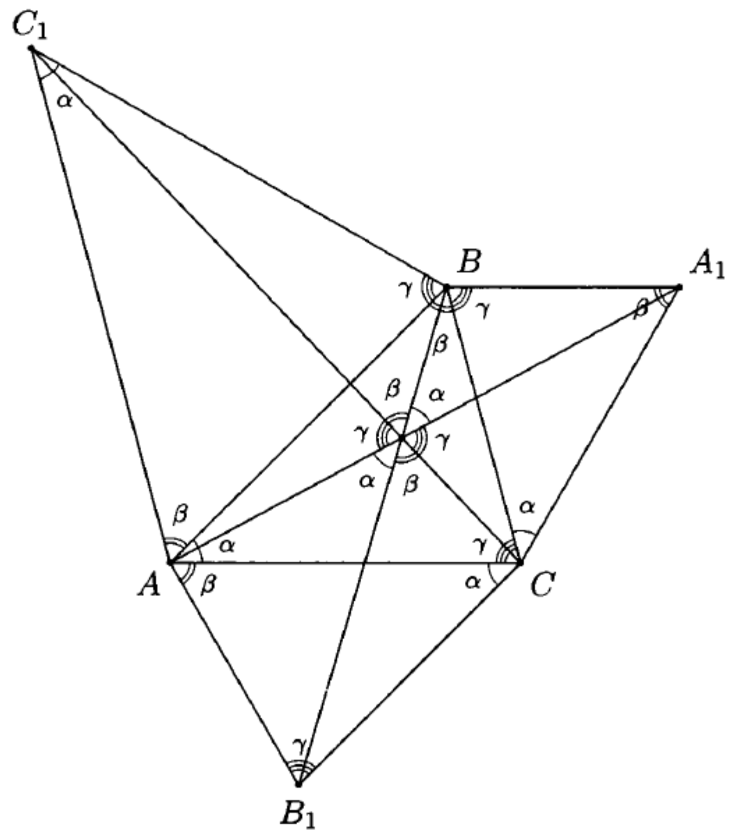
به این نتیجه می‌رسیم که P، نقطه‌ی بروکارد، در واقع محل هم‌رسی دوایری است که به ترتیب بر AB, BC, CA در B, C, A مماس شده است و به ترتیب از نقاط C, A, B می‌گذرد.
در ادامه خواص دیگری از این نقطه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنید P نقطه‌ی بروکارد اول باشد. A_1، B_1 و C_1 را به ترتیب نقاط تقاطع خطوط AP، BP و CP با دایره‌ی محیطی مثلث ABC بگیرید. در این صورت دو مثلث ABC و $B_1C_1A_1$ هم‌نهشت هستند. (برای نقطه‌ی بروکارد دوم، دو مثلث ABC و $C_1A_1B_1$ هم‌نهشت هستند.)

اثبات. اثبات قضیه‌ی بالا ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. □

قضیه ۲. اگر پای عمودهای وارد از نقطه‌ی بروکارد P بر اضلاع AB، BC و CA از مثلث ABC را به ترتیب C_1، A_1 و B_1 بنامیم، آن‌گاه دو مثلث ABC و $B'C'A'$ متشابه خواهند بود و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\sin\varphi$ است که:

$$\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA.$$



شکل ۲. اثبات وجود و یکتایی نقطه‌ی اول بروکارد

اثبات. نقاط B' و C' روی دایره‌ای به قطر AP قرار دارند. بنابراین داریم:

$$\angle B'C'P = \angle B'AP = \varphi, \qquad \angle C'B'P = \angle C'AP = \alpha - \varphi.$$

و به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$\angle C'A'P = \varphi, \quad \angle A'C'P = \beta - \varphi,$$

$$\angle A'B'P = \varphi, \quad \angle B'A'P = \gamma - \varphi.$$

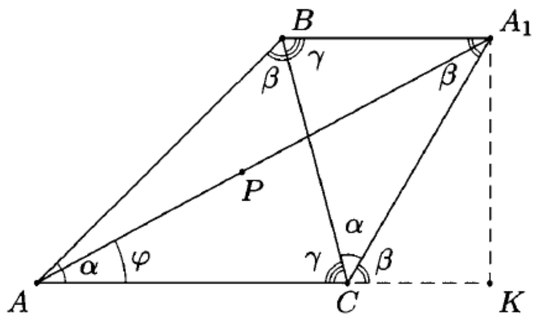
از آن‌جایی که زوایای دو مثلث مورد نظر برابرند پس متشابه هستند. به علاوه این را نیز می‌فهمیم که دو مثلث ABP و $B'PC'$ متشابه هستند و داریم:

$$\frac{B'C'}{AB} = \frac{B'P}{AP} = \sin\varphi.$$

□

زاویه‌ی φ را در نظر بگیرید. این زاویه را می‌توان به کمک زاویه‌های مثلث ABC محاسبه کرد. برای این هدف قسمت‌های اضافی شکل ۲ را پاک کنیم تا به شکل ۳ برسیم. هم‌چنین از نقطه‌ی A_1 بر AC عمود رسم می‌کنیم تا AC را در K قطع کند. خواهیم داشت:

$$\cot\ \varphi = \frac{AK}{A_1K} = \frac{AC}{A_1K} + \frac{CK}{A_1K} = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma.$$



شکل ۳. تغییریافته‌ی شکل شماره ۲

برای نقطه‌ی بروکارد دوم هم دقیقاً همین رابطه برقرار است و به زاویه‌ی φ «زاویه‌ی بروکارد» می‌گوییم. با توجه به رابطه‌های

$$\frac{AP}{BP}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)},\qquad \frac{BP}{CP}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)},\qquad \frac{CP}{AP}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\gamma-\varphi)}.$$

و از ضرب این‌ها نتیجه می‌شود:

$$\sin^{۳}\varphi=\sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi).$$

که این رابطه، یک رابطه‌ی غیر صریح برای φ به دست می‌دهد.

قضیه ۳. برای φ، زاویه‌ی بروکارد، نابرابری‌های زیر برقرار هستند:

۱. $\varphi\le\frac{\pi}{۶}$.
۲. $\varphi^{۳}\le(\alpha-\varphi)(\beta-\varphi)(\gamma-\varphi)$.
۳. $۸\varphi^{۳}\le\alpha\beta\gamma$.

اثبات. ۱. با استفاده از تساوی $\cot\varphi=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$، بعد از کمی محاسبه به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\ge ۲.$$

پس داریم:

$$۲\sin\varphi\le\sin(\alpha+\varphi)\le ۱.$$

که حکم را نتیجه می‌دهد.
۲. تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)=\ln x-\ln\sin x.$$

به وضوح توابع زیر به ازای $\circ < x < \pi$ مقادیری مثبت دارند.

$$f'(x) = \frac{۱}{x} - \cot x, \quad f''(x) = \frac{۱}{\sin^{۲} x} - \frac{۱}{x^{۲}}.$$

بنابراین تابع f در بازه‌ی $[\circ, \pi]$ صعودی اکید می‌باشد و هم‌چنین نمودار تابع در این بازه محدب است که این برقراری نابرابری زیر را نتیجه می‌دهد برای اعداد $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n$ که

$$\circ \leq x_i \leq \pi, \quad \circ \leq \lambda_i, \quad \lambda_۱ + \ldots + \lambda_n = ۱.$$

خواهیم داشت:

$$f(\lambda_۱ x_۱ + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_۱ f(x_۱) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

از قسمت ۱ داریم که $\varphi \leq \frac{\pi}{۶}$ و از آن‌جایی که تابع صعودی اکید است، خواهیم داشت $f(\varphi) \leq f\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ و از این نتیجه می‌شود:

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right) = f\left(\frac{\varphi + (\alpha - \varphi) + \varphi + (\beta - \varphi) + \varphi + (\gamma - \varphi)}{۶}\right) \leq$$
$$\frac{۱}{۶}\left(f(\varphi) + f(\alpha - \varphi) + f(\varphi) + f(\beta - \varphi) + f(\varphi) + f(\gamma - \varphi)\right).$$

با استفاده از یکنوا بودن تابع لگاریتم می‌توانیم رابطه‌ی بالا را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\left(\frac{\varphi}{\sin \varphi}\right)^{۶} \leq \left(\frac{\pi/۶}{\sin(\pi/۶)}\right)^{۶} \leq \frac{\varphi^{۳}(\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)}{\sin^{۳}\varphi \sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi)}.$$

و با استفاده از این واقعیت که $\sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi) = \sin^{۳}\varphi$ به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\varphi^{۳} \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi).$$

۳. نابرابری $\varphi^{۳} \leq (\alpha - \varphi)(\beta - \varphi)(\gamma - \varphi)$ نتیجه می‌دهد:

$$۶۴\varphi^{۶} \leq ۴^{۳}\varphi(\alpha - \varphi)\varphi(\beta - \varphi)\varphi(\gamma - \varphi)$$

نابرابری بالا و نابرابری‌های زیر که به وضوح برقرار هستند، حکم را نتیجه می‌دهند:

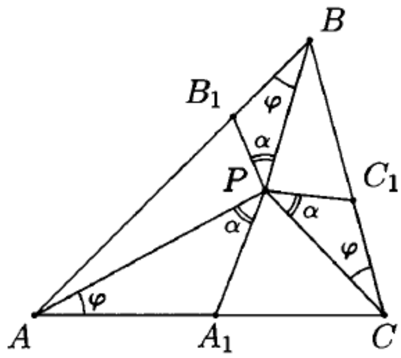
$$۴\varphi(\alpha - \varphi) \leq \alpha^{۲}, \quad ۴\varphi(\beta - \varphi) \leq \beta^{۲}, \quad ۴\varphi(\gamma - \varphi) \leq \gamma^{۲}.$$

□

فرض کنید P نقطه‌ی بروکارد اول باشد، روی اضلاع AB، BC و CA به ترتیب نقاط $C_۱$، $A_۱$ و $B_۱$ را مطابق شکل ۴، به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که:

$$\angle APA_۱ = \angle BPB_۱ = \angle CPC_۱ = \alpha.$$

در این صورت‌های مثلث‌های $APA_۱$، $BPB_۱$ و $CPC_۱$ متشابه هستند، این به آن معناست که مثلث $A_۱B_۱C_۱$ تحت یک تجانس مارپیچی به مرکز P، زاویه‌ی α و نسبت $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\phi}$ به مثلث ABCتبدیل شده و لذا با آن متشابه است.



شکل ۴. تشابه مثلث‌های ABC و $A_۱B_۱C_۱$.

قضیه ۴. فرض کنید رئوس B و C از مثلث ABC ثابت باشند و نقطه‌ی A به گونه‌ای حرکت کند که φ، زاویه‌ی بروکارد، ثابت بماند. آن‌گاه مکان هندسی راس A دایره‌ای به شعاع $\sqrt{\cot^۲\varphi-۳}\ (\frac{a}{۲})$ است (a برابر با طول ضلع BC است).

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر مساحت مثلث را با S و طول اضلاع AB، BC و CA را مطابق معمول به ترتیب با c، a و b نمایش دهیم، رابطه‌ی زیر برای مساحت مثلث برقرار است:

$$\cot\varphi=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۴S}.$$

برای اثبات رابطه‌ی بالا به کمک رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$a^۲=c^۲+b^۲-۲bc\cos\alpha=c^۲+b^۲-۴S\cot\alpha,$$

$$b^۲=c^۲+a^۲-۲ac\cos\beta=c^۲+a^۲-۴S\cot\beta,$$

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ba\cos\gamma=a^۲+b^۲-۴S\cot\gamma.$$

با جمع این روابط خواهیم داشت:

$$\cot\varphi=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۴S}. \quad (*)$$

فرض کنید نقاط B و C در مختصات $(\pm\ a/۲,۰)$ قرار دارند و نقطه‌ی A در مختصات (x,y) است. حال رابطه‌ی $()*)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\cot\varphi=\frac{a^۲+\left(\frac{a}{۲}+x\right)^۲+y^۲+\left(-\frac{a}{۲}+x\right)^۲+y^۲}{۲ay}\Rightarrow ۲ay\cot\varphi=۲y^۲+۲x^۲+۳a^۲/۲.$$

پس هر نقطه‌ی (x,y) که در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند، روی دایره‌ای به مرکز $\left(۰,\frac{a}{۲}\cot\varphi\right)$ و شعاع $\frac{a}{۲}\sqrt{\cot^۲\varphi\ -۳}$ واقع شده است. □