

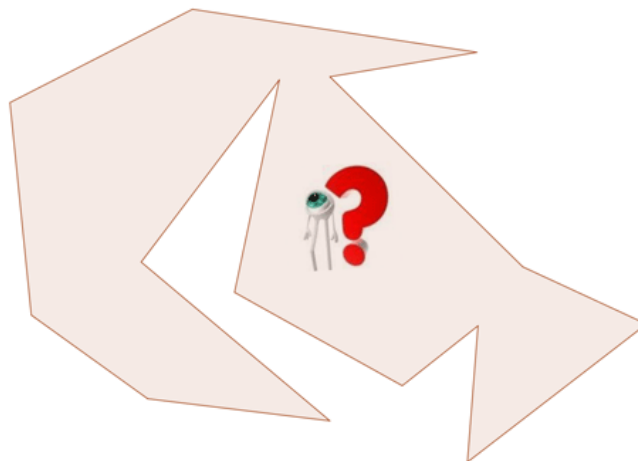
مرتضی ثقفیان
کارشناسی ارشد
علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف



چندوجهی‌های مرتضی

مقدمه

فرض کنید در اتاقی خالی ایستاده‌اید که به شکل یک چندضلعی دلخواه است، و به دور تا دور خود نگاه می‌کنید. چه می‌بینید؟ طبیعتاً تعدادی از دیوارهای اتاق را می‌بینید! اما آیا همواره همه دیوارها را به طور کامل می‌بینید؟ اصلاً آیا در هر اتاقی که قرار گیرید، همواره دیواری وجود دارد که آن را به طور کامل ببینید؟ به این‌گونه مسائل، مسائل دیدنی^۱ می‌گویند. این‌گونه مسائل کاربرد زیادی در بینایی ماشین، گرافیک کامپیوتری و برنامه‌ریزی حرکت دارند. نسخه‌های مختلفی از مسائل دیدنی وجود دارد، از جمله وجود اجسامی در اتاق که مانع دید شود، یا مسئله مشهور نگهبانی از موزه و نگهبانی از نگهبانان و غیره. سؤال اصلی این است که تصویری که از یک نقطه داخل یک اتاق دیده می‌شود چیست و چه خواصی دارد؟



شکل ۱.۲. مسائل دیدنی!

^۱مسائل دیدنی؛

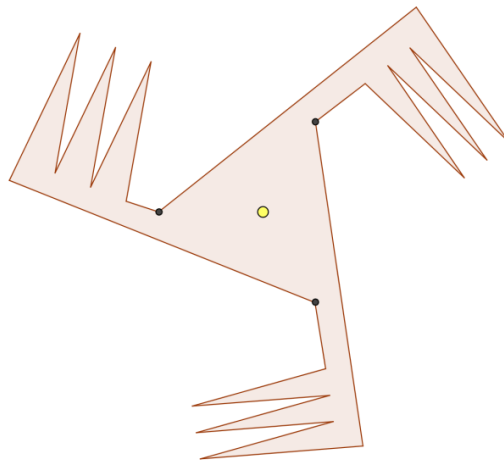
مسائل

در این جا قصد دارم هشت مسئله مطرح کنم که آن‌ها را مسائل نقطه نوری مرتضی (۱) نام‌گذاری می‌کنم، نکته جالب این است که اگرچه صورت آن‌ها شبیه به یکدیگر است ولی برای حل هر یک از آن‌ها باید مسیری را در پیش بگیریم که با دیگری متفاوت است.

لازم است اشاره کنم که چند ماه قبل به همراه برخی از دوستانم از جمله دوست خوبم جعفر نام‌دار، روی این مسائل نقطه نوری فکر کردیم و به نتایج شگفت‌انگیزی رسیدیم! این نتایج را با شما در میان خواهم گذاشت. به خصوص شما را به تفکر و تعمق درباره مسئله چهارم دعوت می‌کنم که به زودی به آن خواهم پرداخت.

نقطه نوری در چند ضلعی

مسائل اول تا سوم، درباره نقطه نوری در چندضلعی هستند که پاسخ آن‌ها قبلاً به دست آمده است:
مسئله اول: یک نقطه نوری درون یک چندضلعی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از رئوس چندضلعی روشن می‌شود؟ پاسخ. حداقل ۳ تا. هرچه مثال بزیند حتماً حداقل سه رأس در آن روشن می‌شوند. نکته مهم این جا است که می‌توان چندضلعی را مثلث‌بندی کرد (چرا؟) و این نقطه در یکی از مثلث‌ها می‌افتد، بنابراین رئوس آن مثلث را می‌بیند. می‌توان چندضلعی‌هایی ساخت که نقطه‌ای در آنها موجود باشد که از آن نقطه تنها ۳ تا از رئوس چندضلعی روشن شود. (شکل ۲.۸)



شکل ۲.۲. اگر در نقطه زرد رنگ بایستید تنها ۳ تا از رئوس این چندضلعی را می‌بینید.

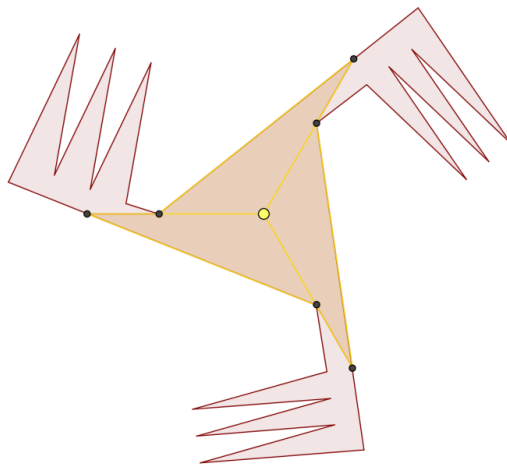
مسئله دوم: یک نقطه نوری درون چندضلعی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از اضلاع چندضلعی به طور کامل روشن می‌شود؟

پاسخ. صفر! چندضلعی‌هایی وجود دارند که نقطه‌ای در آنها موجود باشد که هیچ ضلعی را به طور کامل روشن نکند. (شکل ۳.۸)

مسئله سوم: یک نقطه نوری درون چندضلعی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از اضلاع چندضلعی (هرچند بخشی از آن

چندوجهی‌های مرتضی

ضلع) روشن می‌شود؟ پاسخ. حداقل ۳ تا. اگر اضلاع چندضلعی را دیوارهای بلندی فرض کنیم این نقطه در دورتادور خود دیوار می‌بیند. پس کل 360° درجه حول این نقطه دیوار است. از طرفی هر دیوار (ضلع) می‌تواند کمتر از 180° درجه از دید این نقطه را داشته باشد. پس حداقل ۳ تا دیوار مختلف روشن می‌شود. می‌توان چندضلعی‌هایی ساخت که نقطه‌ای در آنها موجود باشد که از آن نقطه بخشی از تنها ۳ تا از اضلاع چندضلعی روشن شود. (شکل ۳.۸)



شکل ۳.۲. اگر در نقطه زرد رنگ بایستید بخشی از تنها سه تا از یال‌های این چندضلعی را می‌بینید و هیچ یالی را به طور کامل نمی‌بینید.

به طور کلی در صفحه با توجه به قابلیت مثلث‌بندی چندضلعی‌ها پاسخ مسائل فوق مشخص است. به عنوان تمرین می‌توانید پاسخ سه مسئله فوق را وقتی نقطه مورد نظر خارج از چندضلعی باشد به دست آورید.

نقطه نورانی در چند وجهی

اما در فضای سه‌بعدی اوضاع کمی تفاوت می‌کند. چندوجهی‌ها در فضای سه‌بعدی بسیار پیچیده‌تر و متنوع‌تر از چندضلعی‌ها در صفحه هستند و یافتن حکم کلی درباره آن‌ها نیازمند شهود و بررسی بیشتری است.

اگر بخواهیم مسائل فوق را در دنیای سه‌بعدی هم مطرح کنیم، باید به دنبال یافتن پاسخ‌هایی برای مسائل زیر باشیم:

مسئله چهارم: یک نقطه نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از رئوس چندوجهی روشن می‌شود؟

مسئله پنجم: یک نقطه نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از یال‌های چندوجهی به طور کامل روشن می‌شود؟

مسئله ششم: یک نقطه نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از یال‌های چندوجهی (هرچند بخشی از آن یال) روشن می‌شود؟

مسئله هفتم: یک نقطه نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از وجوه چندوجهی به طور کامل روشن می‌شود؟

مسئله هشتم: یک نقطه نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از وجوه چندوجهی (هرچند بخشی

از آن وجه) روشن می‌شود؟

پیش از ارائه مطالبی درباره مسئله چهارم، مختصری از نتایجی که درباره مسائل پنجم تا هشتم به دست آمد، ارائه می‌دهم و سپس به بررسی مسئله چهارم می‌پردازم که جالب‌ترین مسئله در این بین است، پس حدوداً یک صفحه وقت دارید که روی مسئله چهارم فکر کنید. ("یک صفحه وقت داشتن" عبارت مناسبی است. به نظر من صفحه می‌تواند واحد نسبی شمارش زمان باشد، چون سرعت خواندن آدم‌ها با هم تفاوت دارد!)

پاسخ مسئله پنجم صفر است! شاید با کمی تلاش و شهود فضایی بتوانید مثالی ارائه دهید که هیچ یالی کاملاً روشن نشود. اگر نتوانستید در انتهای این نوشتار مثال را خواهید دید.

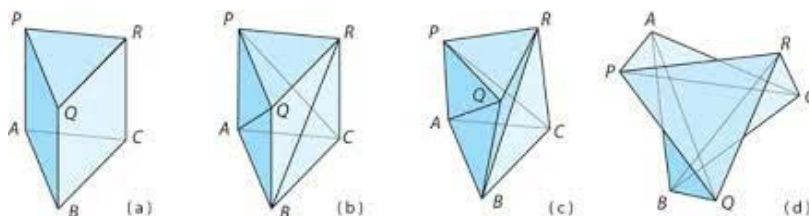
پاسخ مسئله ششم عددی بین ۴ و ۶ است، یعنی ثابت شده که هر نقطه نورانی بخشی از لاقط ۴ یال را روشن می‌کند و از طرفی مثال‌هایی وجود دارد که در آن‌ها بخشی از تنها ۶ یال روشن می‌شود. ولی صادقانه بگویم، مسئله ششم تنها مسئله‌ای در این بین است که هنوز راه حل کاملی برای آن ارائه نشده است.

درباره مسئله هفتم باید بگویم که پاسخ صفر است! کافی است به چندضلعی شکل ۳.۸ ارتفاع دهیم و درواقع اتاق را کاملاً سه‌بعدی در نظر بگیریم و نقطه را متناظراً درون حجم حاصل با ارتفاع دل‌خواهی قرار دهیم. این نقطه علاوه بر دیوارها، کف و سقف اتاق را هم به طور کامل روشن نمی‌کند.

مسئله هشتم هم در نوع خود جالب توجه است. اگر در نقطه نورانی بایستید به هر طرف که نگاه کنید وجوه چندوجهی را می‌بینید. از طرفی هر وجه کمتر از نیمی از تصویر کروی شما را می‌پوشاند. پس درواقع می‌خواهیم کره (تصویری که ناظر در نقطه نورانی می‌بیند) را به تعدادی بخش (تصویر وجوه) افزایش کنیم که هیچ بخشی شامل دو نقطه روبروی قطری از کره نباشد. می‌توانید با کمی حالت‌گیری ثابت کنید که حداقل ۴ بخش برای این کار لازم است. پس همواره بخشی از حداقل چهار وجه دیده می‌شود. ارائه مثالی که در آن دقیقاً چهار وجه روشن شود هم کار دشواری نیست.

حالا همه چیز برای بررسی مسئله چهارم آماده است. در نگاه اول به نظر می‌رسد که پاسخ مسئله، ۴ باشد و مثال‌های مختلف هم به همین عدد یا اعداد بزرگتر منجر می‌شود. اما چگونه اثبات کنیم که پاسخ نمی‌تواند کمتر از چهار باشد؟ اصلاً آیا چندوجهی وجود دارد که از نقطه‌ای درون آن، تنها یک، دو یا سه رأس دیده شود؟ یا حتی هیچ رأسی؟! مثلاً اگر بتوان مشابه مثلث‌بندی در صفحه، هر چندوجهی در فضای سه‌بعدی را به چهاروجهی‌ها افزایش کرد، آن‌گاه نقطه نورانی همواره در یک چهاروجهی قرار می‌گیرد و در نتیجه حداقل ۴ رأس را روشن می‌کند.

متأسفانه چنین افزایی همیشه میسر نیست! در سال ۱۹۲۸ شخصی به نام شونهارت^۲ یک چندوجهی (شکل ۴.۸) ارائه کرد که قابل افزایش به چهاروجهی‌ها نیست، حتی همه قطره‌های آن خارج از چندوجهی قرار می‌گیرند. چندوجهی شونهارت درواقع یک منشور مثلثی است که وجه بالای آن را دوران داده‌ایم و وجوه کناری را برای اینکه خم نشوند، اصلاح کرده‌ایم.

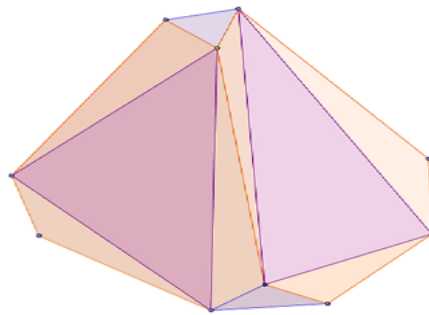


شکل ۴.۲. چندوجهی شونهارت حاصل از دوران وجه بالایی یک منشور مثلثی

^۲شونهارت:.

اما همین چندوجهی شونهارت را در نظر بگیرید، اگر در نزدیکی وسط وجه پایین آن یک نقطه نورانی قرار دهید تنها سه رأس پایین روشن می‌شوند! طبیعی است که ما^۳ با دیدن چنین مثالی برای تنها ۳ رأس روشن، به این فکر افتادیم که شاید با چرخاندن برخی از وجوه چندوجهی‌ها بتوانیم تعداد رئوس روشن را کمتر کنیم و یا حتی آن را به صفر برسانیم! اگر یک چندوجهی موجود باشد که از نقطه علامت‌خورده‌ای داخل آن هیچ یک از رئوسش روشن نشود، به چنین چندوجهی عجیبی چندوجهی مرتضی می‌گوییم! پس مسئله بر سر بودن یا نبودن چندوجهی مرتضی است!

واقعیت این است که مدتی پس از ناکامی در یافتن چنین چندوجهی، بالاخره در ماجرای جالبی پاسخ مسئله پیدا شد. در واقع روزی من به شدت سرما خوردم و از شدت سرما خوردگی شب تا به صبح خواب بر چشمان ما^۴ نیامد. در اثنای مبارزه با بیماری ایده‌ای برای ساختن یک چندوجهی مرتضی به ذهنم رسید (چرا؟! و آن این بود که یک چهاروجهی منتظم در نظر بگیریم و رئوس آن را تا همسایگی کوچکی برش دهیم، سپس وجوه ایجاد شده را بچرخانیم، چیزی شبیه به شکل ۵.۲. نیمه‌شب به وسیله نرم‌افزار شکل مورد نظر را رسم کردم و همه چیز به نظر درست می‌آمد اما مطمئن نبودم زیرا چک کردن خواص شکل سه‌بعدی در یک صفحه دویعدی (مانیتور) کار دشواری است. پس هیجان‌زده کاغذ و چسب و قیچی و وسایل دیگر را برداشتم و برش و چسباندن را آغاز کردم تا چندوجهی را بسازم. وضعیت مضحکی شده بود، نیمه‌شب وقتی همه خواب بودند یک بیمار در حال درست کردن کاردستی بود!

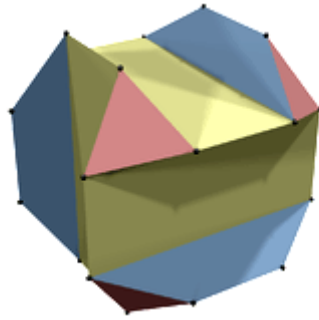


شکل ۵.۲. ماحصل تلاش‌های مذبحانه در یک شب سرد برای یافتن چندوجهی مرتضی!

هرچه آن را می‌ساختم در جایی مشکل به وجود می‌آمد و تا صبح موفق به این کار نشدم، چند روز بعد وقتی سلامتی کامل را بازیافتم موضوع را با دوستان و همکاران مطرح کردم و پس از تلاش‌هایی به وسیله نرم‌افزار موفق شدیم نشان دهیم که برای چهاروجهی چنین کاری ممکن نیست، با این حال به نظر می‌رسید ایده برای چندوجهی دیگری کار کند. تا این که همان شب دوست خوبم علی خزلی موفق شد اولین چندوجهی مرتضی را به وسیله نرم‌افزار به دست آورد. من هم با کاغذ آن را ساختم تا اطمینان کامل کسب کنیم.

خب! این (شکل ۶.۲) یک چندوجهی مرتضی است که از بریدن رئوس یک مکعب و سپس چرخاندن وجوه جدید آن به دست آمده است! این چندوجهی دارای ۲۴ رأس و ۲۶ وجه و ۴۸ یال است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید از مرکز این چندوجهی هیچ یک از رئوس آن، و در نتیجه هیچ یالی به طور کامل دیده نمی‌شود، پس پاسخ مسئله پنجم هم صفر است. شکلی که از مرکز این چندوجهی دیده می‌شود یک مکعب است که یال‌های آن لابلای هم فرو رفته‌اند.

^۳من، جعفر نام‌دار و سایر دوستان
^۴همان "من" به صورت ادبی



شکل ۶.۲. یک چندوجهی مرتضی! اگر در مرکز این چندوجهی قرار گیرید هیچ یک از رئوس را نمی‌بینید. شکلی که از مرکز این چندوجهی دیده می‌شود یک مکعب است که یال‌های آن لابلای هم فرو رفته‌اند.

چندوجهی‌های مرتضی دیگری هم وجود دارند. مسئله چندوجهی مرتضی با کمترین تعداد رئوس هنوز حل نشده است. پاسخ کامل مسئله ششم هنوز مشخص نیست ولی به نظر می‌رسد پاسخ برابر با ۶ است. به طور کلی مسئله یافتن حداقل تعداد نگهبانان لازم برای نگهبانی از یک موزه سه‌بعدی به شکل یک چندوجهی، مسئله بسیار دشواری به نظر می‌رسد. مسئله دیگری نیز وجود دارد و آن همان مسئله چهارم برای حالتی است که نقطه نورانی خارج از چندوجهی باشد که شما را دعوت می‌کنم به این مسئله نیز فکر کنید و دست‌آورد هایتان را برای ما بفرستید.^۵

^۵ در این کتاب مطالب جالبی برای علاقه‌مندان وجود دارد:

O'Rourke, Joseph (1987), Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press, ISBN 0-19-503965-3.